Wykład 2.0 (01.03.2013) Opracował: Cezary Bartoszuk

# Szerokość drzewiasta

**Uwaga 1.** Motywacją tego wykładu jest *Twierdzenie o kracie*, które mówi mniej więcej, że

graf G albo wygląda jak grube drzewo albo minorem tego grafu jest krata.

celem tego wykładu jest określić co oznacza *grube drzewo*.

**Definicja 2** (tree decomposition)**.** *Dekompozycją drzewiastą* grafu $G$ nazwiemy parę $\langle T, (V_t)_{t \in T} \rangle$, gdzie $T$ jest drzewem, $V_t \subseteq V[G]$ dla każdego $t \in T$ oraz spełnione są następujące warunki:

1. $\bigcup_{t \in T} \; V_t = V[G]$
2. $\forall_{uv \in E[G]} \, \exists_{t \in T} \; u, v \in V_t$
3. $\forall_{uv \in E[G]} \, \{t \, : \, v \in V_t\}$ jest spójny w $T$

**Definicja 3.** *Szerokością* dekompozycji nazwiemy:

$$\text{szerokość}\langle T, (V_t)_{t \in T} \rangle = \max_{t \in T} |V_t| - 1$$

**Definicja 4** (tree width)**.** *Szerokością drzewiastą* nazwiemy:

$$\text{tw}(G) = \min \text{ szerokość}\langle T, (V_t)_{t \in T} \rangle \text{ (po dekompozycjach } G)$$

**Lemat 5.** $V_{t_1} \cap V_{t_2} = X_1 \cap X_2$*, gdzie*

$$X_i = \{v \in V[G] \, : \, v \in V_t \textit{ dla } T \textit{ będącego po stronie } t_i \textit{ w } T \setminus \{t_1, t_2\}\}$$

*Dowód.* Wynika to prosto z warunku spójnośći. □

**Lemat 6.** *Jeżeli* $u_1 \in X_1 \setminus (V_{t_1} \cap V_{t_2})$ *oraz* $u_2 \in X_2 \setminus (V_{t_1} \cap V_{t_2})$*, to* $u_1$ *i* $u_2$ *niespójne w* $G \setminus (V_{t_1} \cap V_{t_2})$*.*

*Dowód.* Załóżmy przeciwnie, że $u_1$ i $u_2$ spójne w $G \setminus (V_{t_1} \cap V_{t_2})$. Wtedy istnieje ścieżka $w_i|_{i=0}^{k+1}, w_0 = u_1, w_{k+1} = u_2$ w $G \setminus (V_{t_1} \cap V_{t_2})$. Zatem istnieje $i$ takie, że $w_i \in X_1$ oraz $w_{i+1} \in X_2$. Skoro $w_i w_{i+1} \in E[w]$ to z warunku 2 w definicji dekompozycji drzewiastej albo $w_i \in X_2$ albo $w_{i+1} \in X_1$. Zatem, z lematu 5 albo $w_i \in V_1 \cap V_2$ albo $w_{i+1} \in V_1 \cap V_2$. Ale to jest sprzeczne z $V[w] \subseteq G \setminus (V_1 \cap V_2)$. □

**Lemat 7.** $H \leqslant_M G \;\Rightarrow\; \text{tw}(H) \leqslant \text{tw}(G)$

*Dowód.* Minor otrzymujemy na drodze usuwania krawędzi, wierzchołków i ściągania krawędzi. Z dekompozycji $G$ (minimalnej względem szerokości) tworzymy dekompozycję $H$ strukturalnie względem usuwania wierzchołków, usuwania krawędzi i ściągania krawędzi.

$G \setminus v$ Usuwając wierzchołek $v$ z $G$ poprawiamy jego dekompozycję usuwając $v$ ze wszystkich worków. Zachowujemy spójność, bo inne wierzchołki były wcześniej spójne w dekompozycji. Każdy wierzchołek nadal znajduje się w pewnym worku. Każda krawędź również znajduje się w pewnym worku gdyż usuwając $v$ z $G$ usunęliśmy również wszystkie krawędzie dotykające $v$.

$G \setminus uw$ Dekompozycja drzewiasta się nie zmienia. Mamy tylko jedną krawędź mniej do pokrycia.

$G(u = w)$ W tym kroku utożsamiamy dwa wierzchołki. Widać, że dekompozycja pokrywa dalej wszystkie wierzchołki (łącznie z utożsamionym). Również wszystkie krawędzie są pokryte: Jeżeli spojrzymy na krawędź $uv$ gdzie $u$ był jednym ze ściągniętych wierzchołków i został utożsamiony z pewnym $w$ tworząc $z$ - krawędź $uv$ jest pokryta w tym samym worku jako $zv$. Krawędź $uw$ gdzie $u$ oraz $w$ to wierzchołki skojarzone nie jest już obecna w grafie, zatem nie musi być pokryta w dekompozycji. Jedyny problem może stanowić spójność, gdyż na pierwszy rzut oka worki pokrywające $u$ i $w$ nie musiały być spójne. Ale w grafie przed wykonaniem tego kroku istniała krawędź $uw$ (którą ściągnęliśmy). Zatem musiał istnieć worek zawierający $u$ i $w$. Z tego prosto wynika, że wierzchołek utożsamiający $u$ i $w$ jest spójny w dekompozycji.

W efekcie otzymujemy dekompozycję $H$ o niewiększym *tree width* niż $G$, gdyż żaden z worków dekompozycji G nie zwiększył swojego rozmiaru w trakcie procesu. □

**Lemat 8.** $K_n \subseteq G \Rightarrow \mathrm{tw}(G) \geqslant n-1$

*Dowód.* Weźmy dowolne sąsiadujące $t_1$, $t_2$ w drzewie dekompozycji. Rozważmy dwa przypadki:

$K_n \subseteq V_{t_1} \cap V_{t_2}$. Wtedy albo $K_n \subseteq V_{t_1}$ albo $K_n \subseteq V_{t_1}$ zatem $\mathrm{tw}(G) \geqslant n-1$.

Załóżmy więc $K_n \nsubseteq V_{t_1} \cap V_{t_2}$. Wtedy albo $K_n \cap (X_1 \setminus X_2) = \emptyset$ albo $K_n \cap (X_2 \setminus X_1) = \emptyset$. Zorientujmy krawędź $t_1t_2$ w kierunku kliki. Po zorientowaniu wszystkich krawędzi widać, że istnieje $t_i$ ze stopniem wyjściowym równym 0. Zatem $K_n \subseteq V_{t_i}$. □

**Definicja 9.** $X \subseteq V[G]$ jest *zewnętrznie k-spójny* ($k \geqslant |X|$) jeżeli dla każdych dwu rozłącznych ($Y \cap Z = \emptyset$), równolicznych ($|Y| = |Z| = l \leqslant k$) podzbiorów $X$ ($Y, Z \subseteq X$) istnieje $l$ wierzchołkowo rozłącznych z $G[X]$ ścieżek pomiędzy nimi (gdzie $l$ jest ich licznością).

**Definicja 10** (k,s-mesh)**.** $A, B \subseteq V[G]$, $A \cup B = V[G]$ nazwiemy *k,s-splątaniem* jeżeli:

1. $|A \cap B| = s$
2. $A \cap B$ zewnętrznie *k-spójne* w $G[B]$.
3. istnieje drzewo $D \subseteq G[A]$ takie, że $A \cap B \subseteq V[D]$ oraz $\max\deg[D] \leqslant 3$.

**Definicja 11.** k,s-mesh* Definicja **k,s-splątania* dodatkowo zakłada:

1. $\forall_{v \in A \cap B} \deg_D(v) \leqslant 2$
2. $\exists_{v \in A \cap B} \deg_D(v) \leqslant 1$

**Twierdzenie 12.** *Dla* $1 \leqslant k \leqslant s$*, jeżeli* $G$ *nie ma* k,s-splątania *to* $\mathrm{tw}(G) < k + s$.

*Dowód.* Konstruujemy dekompozycję $G$, która nie ma szerokości większej niż $k + s$.

START

$U = v$ gdzie $v \in V[G]$.

KROK

$U \subseteq V[G]$ - zakładamy, że zbudowaliśmy dekompozycję $G[U]$. Niech $C \in \{C_1, \ldots\}$ - spójne składowe $G \setminus U$.

NIEZMIENNIK

$X := N(C) \subseteq U$

$|X| \leqslant s$, $X$ jest podzbiorem jakiegoś worka w dekompozycji $U$ oraz $D \subseteq G \setminus C$ - drzewo jak w definicji dla splątania* $(V[G] \setminus C, C \cup X)$.

PRZYPADEK 1 $|X| < s$

Bierzemy $v_1 \in X$ takie, że $\deg_D(v_1) \leqslant 1$ oraz $\exists_{u \in C \cap N(v_1)}$ i robimy worek $\widehat{X} = X \cup u$ oraz drzewo $D \cup \{v_1 u\}$.

PRZYPADEK 2 $|X| = s$

Czy $(V[G] \setminus C, C \cup X)$ nie jest *k,s-mesh*?

Nie może, bo byłoby to sprzeczne z założeniem. Zatem $X$ nie jest *zewnętrznie k-spójny* w $C \cup X$. Niech $Y, Z \subseteq X$, $|Y| = |Z| = l \leqslant k$ będzie świadkiem niespójności. Istnieje zatem minimalne cięcie $W \subseteq (C \cup Y \cup Z)$, $|W| < l \leqslant k$. Niech $C'$ będzie spójną składową $C \setminus W$, bez straty ogólności załóżmy, że leży ona po stronie $Y$ separatora $W$. Robimy worek $X \cup W$. Sprawdzamy, czy dla $C'$ spełniony jest niezmiennik.

- $N(C') \subseteq (X \setminus Z) \cup W$, $|Z| = l > |W|$, czyli $|N(C')| < |X| = s$.
- $N(C') \subseteq (X \cup W)$, a $X \cup W$ jest nowym workiem.
- $W$ - minimalne cięcie między $Y$ i $Z$ zatem istnieje $|W|$ ścieżek rozłącznych wierzchołkowo. Dodaję ścieżki $Z - W$ do $D$.

□