Wykład 1 (22.02.2013) Opracował: Piotr Leszczyński

Teoria minorów – wprowadzenie

1 Definicje wstępne

Definicja 1. Niech G i H będą grafami prostymi. Graf H jest *minorem* G, jeśli istnieje rodzina $(U_h)_{h \in V(H)}$ niepustych podzbiorów $V(G)$ taka, że:

1. U_h są parami rozłączne;
2. $G[U_h]$ jest spójny dla każdego $h \in V(H)$;
3. jeśli $hh' \in E(H)$ to $E(U_h, U_{h'}) \neq \emptyset$.

Innymi słowy, H jest minorem H jeśli można go otrzymać z G poprzez ciąg operacji, z których każda operacja jest

1. usunięciem krawędzi;
2. usunięciem wierzchołka i wszystkich incydentnych z nim krawędzi;
3. ściągnięciem krawędzi uv, tj. utożsamieniem u i v.

Definicja 2. Niech G i H będą grafami prostymi. Graf H jest *topologicznym minorem* G, jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f\colon V(H) \to V(G)$ oraz rodzina $(P_{uv})_{uv \in E(H)}$ niepustych podzbiorów $E(G)$ takie, że:

1. jeśli $uv \in E(H)$ to P_{uv} jest ścieżką w grafie G łączącą wierzchołki $f(u)$ i $f(v)$;
2. P_{uv} są rozłączne wierzchołkowo poza końcami.

Uwaga 3. Jeśli graf H jest topologicznym minorem grafu G, to H jest równiez minorem G.

2 Dobry quasi–porządek (WQO)

Definicja 4. Quasi–porządek $(A, \leqslant)$ jest dobrym quasi–porządkiem (well quasi–ordering; WQO), jeśli w dowolnym ciągu $x_1, x_2, x_3 \ldots \in A$ istnieje para indeksów $i < j$ takich, że $x_i \leqslant x_j$.

Twierdzenie 5 (Robertson-Seymour)**.** *Relacja* $\leqslant_M$ bycia minorem *jest WQO na zbiorze skończonych grafów prostych.*

Uwaga 6. Relacja $\leqslant_{TM}$ *bycia topologicznym minorem* nie jest WQO na zbiorze skończonych grafów prostych.

Twierdzenie 7. *Następujące warunki są równoważne dla quasi–porządku* $(A, \leqslant)$*:*

1. $(A, \leqslant)$ *jest WQO;*

2. *w każdym ciągu $x_1, x_2, x_3 \ldots \in A$ jest nieskończony podciąg niemalejący;*

3. *w $(A, \leqslant)$ nie ma nieskończonego łańcucha i nieskończonego ciągu ściśle malejącego.*

Dowód. Implikacje 2. $\Rightarrow$ 1. oraz 1. $\Rightarrow$ 3. są oczywiste. Pozostaje do pokazania implikacja 3. $\Rightarrow$ 2.

Niech $x_1, x_2, x_3 \ldots \in A$ będzie dowolnym ciągiem. Utożsammy elementy ciągu z wierzchołkami grafu pełnego $G(V, E)$. Następnie pokolorujmy każdą krawędź $x_i x_j \in E$ na jeden z trzech kolorów. Kolor uzależniamy od relacji pomiędzy x_i oraz x_j (dla $i < j$). Istnieją nastepujące przypadki/kolory:

1. x_i i x_j są nieporównywalne;

2. $x_i \leqslant x_j$;

3. $x_i > x_j$.

Z twierdzenia Ramseya w tym grafie istnieje nieskończona jednokolorowa klika. Z założenia dowodu nie jest to klika w 1. ani 3. kolorze. Czyli istnieje nieskończona klika w kolorze 2., co jest równoznaczne z istnieniem nieskończonego podciągu wstępującego i kończy dowód. □

Niech $(A, \leqslant)$ będzie WQO oraz $A^{<\omega}$ będzie rodziną skończonych podzbiorów A. Zdefiniujmy quasi–porządek $\leqslant$ na $A^{<\omega}$ w sposób następujący:

Dla $X, Y \in A^{<\omega}$ mamy $X \leqslant Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja równowartościowa $f \colon X \to Y$ taka, że dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $f(x) \geqslant x$.

Twierdzenie 8. *Quasi–porządek $(A^{<\omega}, \leqslant)$ określony powyżej jest WQO.*

Dowód. Przeprowadźmy dowód niewprost.

Przez ciąg–kontrprzykład rozumiemy ciąg $A_1, A_2, A_3 \ldots \in A^{<\omega}$ nie spełniający własności z definicji WQO.

Konstruujemy minimalny ciąg–kontrprzykład w następujący sposób: mając $A_1, A_2, \ldots, A_n \in A^{<\omega}$ dobieramy A_{n+1} tak, by miało jak najmniejszą moc, ale również tak, aby otrzymany prefiks wciąż dało się przedłużyć do ciągu–kontrprzykładu. Oczywiście tak skonstruowany ciąg $A_1, A_2, A_3 \ldots$ jest ciągiem–kontrprzykładem.

Następnie z każdego ze zbiorów A_n wybierzmy po jednym, dowolnym elemencie a_n i określmy ciąg zbiorów $B_n = A_n \setminus \{a_n\}$. Skoro $(A, \leqslant)$ jest WQO, to w ciągu (a_n) istnieje podciąg niemalejący. Oznaczmy go przez $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Następnie rozważmy następujący ciąg:

$$A_0, A_1, \ldots, A_{n_1 - 1}, B_{n_1}, B_{n_2}, B_{n_3}, \ldots$$

Z minimalności (A_n) ten ciąg nie może być ciągiem–kontrprzykładem, co implikuje istnienie jednego z trzech przypadków:

1. Istnieją $i < j$ takie, że $A_i \leqslant A_j$.

2. Istnieją i, j takie, że $A_i \leqslant B_{n_j}$. Wtedy musiałoby zachodzić również $A_i \leqslant A_{n_j}$, bo $B_{n_j} \subset A_{n_j}$.

3. Istnieją $i < j$ takie, że $B_{n_i} \leqslant B_{n_j}$. Skoro $a_{n_i} \leqslant a_{n_j}$ to musiałoby zachodzić również $A_{n_i} \leqslant A_{n_j}$.

Każdy z powyższych warunków jest sprzeczny z faktem, że ciąg (A_n) jest kontrprzykładem, co kończy dowód. □

Twierdzenie 9 (Kruskal 1960)**.** *Klasa drzew z relacją bycia topologicznym minorem jest WQO.*

Dowód. Zawęższmy jeszcze relację bycia topologicznym minorem: załóżmy, że każde drzewo T jest ukorzenione w r_T i $T \leqslant T'$, jeśli mamy podpodział T który jest podgrafem T' tak, że korzenie się pokrywają i zachowany jest porządek od korzenia do liścia.

Robimy ciąg–kontrprzykład $(T_n)_{n \in N}$ jak poprzednio: T_{n+1} jest najmniejszym drzewem takim, że $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ jest prefiksem jakiegoś kontrprzykładu. Oczywiście tak skonstruowany ciąg $T_1, T_2, T_3 \ldots$ jest kontrprzykładem.

Niech A_n będzie rodziną drzew powstałych przez usunięcie z T_n korzenia; $T \in A_n$ jest ukorzenione w sąsiedzie r_{T_n}. Niech $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, przy czym nie utożsamiamy izomorficznych drzew.

Pokażmy, że $(A, \leqslant)$ jest WQO. Niech więc $(T^k)_{k \in N}$ będzie ciągiem drzew z A i niech $n(k)$ będzie indeksem drzewa T_n w którym występuje T^k. Weźmy k takie, że $n(k)$ jest minimalne i spójrzmy na ciąg

$$T_1, T_2, \ldots, T_{n(k)-1}, T^k, T^{k+1}, \ldots$$

Z minimalności (T_n) nie jest on kontrprzykładem, czyli jak poprzednio musi zaistnieć któryś z następujących 3 przypadków:

1. Istnieją $i < j$ takie, że $T_i \leqslant T_j$.
2. Istnieją i, j takie, że $T_i \leqslant T^j$. A ponieważ zachodzi również $T^j \leqslant T_{n(j)}$, to musiałoby być $T_i \leqslant T_j$.
3. Istnieją $i < j$ takie, że $T^i \leqslant T^j$.

Jedynie 3. przypadek nie jest sprzeczny z minimalnością ciągu (T_n), czyli $(A, \leqslant)$ jest WQO.

Z twierdzenia 8. skończone podzbiory A też są WQO, czyli w ciągu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mamy parę $i < j$, że $A_i \leqslant A_j$. No ale to się da przedłużyć na $T_i \leqslant T_j$, sprzeczność. $\square$