Wybrane zagadnienia teorii grafów

podział tematów na egzamin ustny

Przypominam zasady. Poniżej znajduje się podział materiału przedmiotu na trzy działy. Należy sobie wybrać jeden dział, i na egzaminie ustnym pochwalić się ogólną wiedzą na temat *całego* materiału wykładu i szczegółową wiedzą na temat *wybranego* działu. W czasie egzaminu będę przede wszystkim premiować „wszechstronność”, w szczególności

- dobra odpowiedź na wszystkie ogólne pytania (bez szczegółowej wiedzy) powinna zaskutkować wynikiem +0.5 (lub +0 przy pewnych brakach),
- nikła znajomość jednego z działów skutkuje niedodatnim wynikiem, nawet przy świetnej znajomości jednej szczegółowej wiedzy.

Teoria minorów

Wersja podstawowa

1. WQO — definicja, podstawowe właności (twierdzenie 7 z 1. wykładu, zadanie 3). Twierdzenie 8 z 1. wykładu (skończone podzbiory WQO są WQO) z dowodem.
2. Relacja bycia minorem i topologicznym minorem. Przykłady.
3. Twierdzenie Kruskala (twierdzenie 9 z 1. wykładu).
4. Treewidth. Definicja, przykłady, sformułowanie gry o policjantach i złodzieju (zadanie 12). Podstawowe własności (lematy 5-8 z I części 2. wykładu, zadanie 18).
5. Splątanie. Definicja. Twierdzenie o zależności splątań i treewidthu (twierdzenie 12 z I części 2. wykładu)
6. Dowód, że zbiór zewnętrznie k-spójny o dużych parametrach implikuje duży treewidth (zadanie 24).
7. Ciernie. Definicja. Dowód, że w dekompozycji drzewowej istnieje worek pokrywający ciernie (stwierdzenie 5 z II części 2. wykładu). Twierdzenie, że minimalna szerokość dekompozycji odpowiada maksymalnemu rzędowi ciernia.
8. Twierdzenie o kracie.
9. Zastosowania twierdzenia o kracie (zadania 30-32). Wyprowadzenie z twierdzenia o kracie twierdzenia Robertsona-Seymoura dla grafów planarnych.
10. Twierdzenie Robertsona-Seymoura.
11. Zastosowania: rozpoznawanie klas grafów zamkniętych na branie minorów (zadania 35-37).
12. Inne miary szerokości grafu: cliquewidth, definicja i przykład.
13. Twierdzenie, jak szybko można sprawdzać, czy jeden graf jest minorem drugiego.

Wersja zaawansowana

1. Dowód twierdzenia Kruskala (twierdzenie 9 z 1. wykładu).
2. Dowód twierdzenia o cierniach i dekompozycjach drzewowych.
3. Szkic dowodu twierdzenia o kracie dla dowolnych grafów (nie trzeba dowodzić lematu o splątaniach).
4. Szkic dowodu Robertsona-Seymoura, ze sformułowaniem twierdzenia strukturalnego o grafach z wykluczonym minorem.

Kolorowania

Wersja podstawowa

1. Kolorowania, kolorowania listowe — wierzchołkowe i krawędziowe. Definicje $\chi(G)$, $\chi'(G)$, $ch(G)$, $ch'(G)$.
2. Łatwe szacowania liczby chromatycznej. Wniosek 4 z 5. wykładu.
3. Twierdzenia Brooksa i Vizinga.
4. Definicja grafu doskonałego, przykłady, podstawowe własności (zadania 48-51, 54).
5. Sformułowanie Strong/Weak Perfect Graph Theorem (twierdzenia 12 i 13 z 5. wykładu). Twierdzenie 16 z 5. wykładu.
6. Lemat o bliźniakach (lemat 15 z 5. wykładu) z dowodem.
7. Twierdzenie o pięciu barwach z dowodem.
8. Twierdzenia Thomassena o listowym 5-kolorowaniu grafów planarnych.
9. Sformułowanie twierdzenia o czterech barwach. Dowód, że minimalny kontrprzykład na twierdzenie o 4 barwach nie ma wierzchołków stopnia 4 i mniej.

Wersja zaawansowana

1. Dowód twierdzenia Thomassena o listowym 5-kolorowaniu grafów planarnych.
2. Dowód twierdzenia 13 i 16 z 5. wykładu.
3. Discharging: co to jest, jak działa. Dwa przykłady, w tym co najmniej jeden skomplikowany (np. zadanie 67 lub zadanie trzecie z 4. serii prac domowych).
4. Szkic dowodu twierdzenia o czterech barwach: triangularyzacja, zmiana problemu na 3-kolorowanie krawędzi, co to jest konfiguracja redukowalna. Sformułowanie twierdzenia o braku małego cyklu rozcinającego. Idea dowodu, że istnieje konfiguracja redukowalna, przez discharging.

Ekspandery

Wersja podstawowa

1. Definicja ekspansji wierzchołkowej i krawędziowej, podstawowe własności macierzy grafu (symetria, wartości własne istnieją, wektory własne ortogonalne, wartości własne co do modułu nie większe niż d dla d-regularnego multigrafu).
2. Niespójność, dwudzielność w spektrum (zadania 74 i 75).
3. Definicja produktu kartezjańskiego i tensorowego oraz potęgi grafu, zachowanie spektrum przy tych operacjach z dowodem.
4. Nierówności wiążace ekspansje i spektrum.
5. Definicja zygzaka. Własności (liczba wierzchołków, stopień, przynajmniej jedno szacowanie na ekspansję).
6. Konstrukcja deterministyczna dużego ekspandera używająca zygzaka jako czarnej skrzynki.
7. Błądzenia losowe w ekspanderach. Zadania 105-108. Idea redukcji losowości w zadaniu 109.
8. Twierdzenie Alona-Boppana.
9. Twierdzenie $L = SL$.
10. Twierdzenie PCP: sformułowanie twierdzenia oraz sformułowania trzech kroków (preprocessing, amplifikacja, sprzątanie).

Wersja zaawansowana

1. Dowód nierówności wiążących spektrum i ekspansje.
2. Dowód własności spektralnych zygzaka.
3. Dowód twierdzenia $L = SL$ **albo** dowód kroku o preprocesingu oraz szkic dowodu kroku amplifikacji z twierdzenia PCP.
4. Dowód twierdzenia Alona-Boppana.