Wybrane zagadnienia teorii grafów — seria 6

ekspandery, część 2, 24.05.2013–14.06.2013

Zadanie 1. Pokaż, że w dowolnym d-regularnym grafie prostym G wielkość maksymalnego zbioru niezależnego wynosi nie więcej niż $\lambda(G)|V(G)|$.

Zadanie 2. Niech H będzie d-regularnym multigrafem, a G będzie $|V(H)|$-regularnym multigrafem. Załóżmy dodatkowo, że H jest spójny i nie jest dwudzielny.

1. Pokaż, że w grafie $G \circledz H$, każde dwa wierzchołki $(v, w_1) \in V(G \circledz H)$ i $(v, w_2) \in V(G \circledz H)$ są w jednej spójnej składowej.
2. Pokaż, że jeśli dodatkowo założymy, że G jest spójny, to $G \circledz H$ też jest spójny.

Zadanie 3. Niech G będzie d-regularnym multigrafem bez pętli i niech $S, T \subseteq V(G)$ będą dwoma dowolnymi zbiorami wierzchołków w G. Przeprowadzamy dwa doświadczenia. W pierwszym doświadczeniu wybieramy (niezależnie) dwa losowe wierzchołki z $V(G)$, i mówimy, że osiągnęliśmy sukces, jeśli pierwszy należy do S, a drugi do T. W drugim doświadczeniu wybieramy losową krawędź z $E(G)$, kierujemy ją w losowym kierunku, i mówimy, że osiągnęliśmy sukces, jeśli prowadzi ona od wierzchołka należącego do S do wierzchołka należącego do T. Udowodnij, że prawdopodobieństwo sukcesu w tych dwóch doświadczeniach nie różni się o więcej niż $\lambda(G)/d$.
Uwaga na boku: to zadanie jest też prawdziwe, jeśli dopuścimy pętle w G, jednak wówczas musimy trochę skomplikować drugie doświadczenie: pętla ma „jeden koniec" i, w trakcie losowania krawędzi $E(G)$, powinna mieć dwa razy mniejsze prawdopodobieństwo bycia wylosowaną niż krawędź o dwóch końcach. Innymi słowy, w drugim doświadczeniu powinniśmy losować, z rozkładem jednostajnym, „czubek krawędzi". Przy rozwiązywaniu tego zadania można założyć dla uproszczenia, że w grafie G nie ma pętli.