Wybrane zagadnienia teorii grafów — seria 3

wykłady 1–6, 05.04.2013–26.04.2013

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie grafy G takie, że dla każdego całkowitego $k \geqslant 1$, graf G ma dokładnie $k(k-1)^{|V(G)|-1}$ pokolorowań na k kolorów (czyli funkcji $c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ takich, że $c(u) \neq c(v)$ dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$).

Zadanie 2. Piotruś wymyślił następującą definicję dekompozycji grafu nieskierowanego G o co najmniej 2 wierzchołkach. Parę (T, π) nazwiemy *piotrusiową dekompozycją* jeśli:

1. T jest drzewem, które ma dokładnie $|V(G)|$ liści i którego każdy węzeł wewnętrzny ma stopień dokładnie 3;
2. π jest bijekcją między zbiorem $V(G)$ a zbiorem liści drzewa T.

Dla dekompozycji (T, π) i krawędzi $e \in E(T)$ definiujemy *szerokość* e następująco: jeśli T_1 i T_2 są dwoma spójnymi składowymi $T \setminus \{e\}$, to szerokość krawędzi e to liczba krawędzi G łącząca $\pi^{-1}(V(T_1))$ z $\pi^{-1}(V(T_2))$. Szerokość dekompozycji (T, π) to największa szerokość krawędzi $e \in E(T)$.

Pokaż, że jeśli (T, π) jest piotrusiową dekompozycją grafu G o szerokości p, to $\mathrm{tw}(G) \leqslant 6p$.

Zadanie 3. Niech G będzie grafem doskonałym. Pokaż, że istnieją rodziny $\mathcal{A}$ i $\mathcal{K}$, których elementami są podzbiory $V(G)$ oraz

1. dla każdego $K \in \mathcal{K}$, $G[K]$ jest kliką,
2. dla każdego $A \in \mathcal{A}$, $G[A]$ jest zbiorem niezależnym,
3. $\bigcup \mathcal{K} = V(G) = \bigcup \mathcal{A}$, oraz
4. dla każdego $A \in \mathcal{A}$ i dla każdego $K \in \mathcal{K}$, $A \cap K \neq \emptyset$.