Praca domowa nr 5

Magdalena Bojarska nr 305053

Zadanie 1
Niech X będzie największym zbiorem niezależnym w grafie. Wykorzystamy teraz Expander Mixing Lemma dla $S = T = X$. Oczywiście $|E(X, X)| = 0$. Mamy zatem nierówność

$$\frac{d|X|^2}{n} \leqslant \lambda\sqrt{|X||X|}$$

czyli

$$|X| \leqslant \frac{n\lambda}{d} \leqslant n\lambda$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 2
Skoro graf H nie jest dwudzielny, to między każdymi dwoma wierzchołakmi istnieje ścieżka parzystej długości (gdyby tak nie było, to wszystkie cykle byłyby długości parzystej, a to implikuje dwudzielność). Niech wierzchołki w_1 i w_2 będą w H połączone taką ścieżką $u_0, u_1, \ldots, u_{2n} = w_2$. Niech dodatkowo v_2 będzie dowolnym wierzchołkiem połączonym z v w G. W nawiasach prostokątnych będziemy zapisywać jedno przejście w grafie G, w którym każdy wierzchołek zastąpiono kopią H (np. $[(v, a) \to (v, b) \to (u, \overline{b}) \to (u, c)]$ oznacza de facto przejście w grafie $G \circledz H$ od (v, a) do (u, c)). Konstruujemy zatem ścieżkę w grafie $G \circledz H$ łączącą (v, u_0) i (v, u_2):
$[(v, u_0) \to (v, u_1) \to (v_2, \overline{u_1}) \to (v_2, p_1)]$
$[(v_2, p_1) \to (v_2, \overline{u_1}) \to (v, u_1) \to (v, u_2)]$
I analogicznie, przez indukcję konstruujemy przejścia z (v, u_2) do (v, u_4), ..., z (v, u_{2n-2}) do (v, u_{2n}).
Załóżmy teraz dodatkowo, że G jest spójny. Pokażemy ścieżkę łączącą (v_1, w_1) i (v_2, w_2). Niech teraz $v_1 = u_0, u_1, \ldots, u_n = v_2$ będzie ścieżką łączącą v_1 i v_2 w grafie G. Z wierzchołka $(u_0, p_0 = w_1)$ przemieszczamy się (korzystając z faktu udowodnionego powyżej) do takiego wierzchołka (u_0, q_0), który w grafie G z zastąpionymi wierzchołkami przez H ma połączenie z pewnym wierzchołkiem (u_1, p_2). Taki wierzchołek zawsze istnieje, co wynika w oczywisty sposób z konstrukcji zygzaka. Postępując indukcyjnie w ten sposób dojdziemy do wierzchołka (u_n, q_n), z którego już jesteśmy w stanie przejść do (u_n, w_2).
Opisane w rozwiązaniu konstrukcje bardzo łatwo przenoszą się na formalne dowody indukcyjne, ale czytelniejsze jest zapisanie tych rozumowań w postaci konstrukcji.

Zadanie 3
Niech $s = |S|, t = |T|$. Zauważmy na początek, że w pierwszym doświadczeniu prawdopodobieństwo sukcesu wynosi $\frac{s}{n} \cdot \frac{t}{n} = \frac{st}{n^2}$. Niech $x = (x_1, \ldots, x_n)$ będzie wektorem, w którym $x_i = 1$ jeśli $v_i \in S$ i $x_i = 0$ w przeciwnym przypadku. Analogicznie, niech y będzie takim wektorem charakterystycznym dla zbioru T. Wówczas prawdopodobieństwo sukcesu w drugim doświadczeniu wynosi $\frac{x^T A y}{2|E(G)|} = \frac{x^T A y}{nd}$. Rozłóżmy teraz oba wektory x i y na część prostopadłą i równoległą do $\overrightarrow{1}$.

Korzystając z dowodu Expander Mixing Lemma z wykładu, wiemy, że $x^T Ay = \frac{dst}{n} + (x^\perp)^T A(y^\perp)$ oraz $(x^\perp)^T A(y^\perp) \leqslant \lambda\sqrt{st} \leqslant \lambda n$. Stąd,

$$|\frac{x^T Ay}{nd} - \frac{st}{n^2}| = |\frac{dst}{n \cdot nd} + \frac{(x^\perp)^T A(y^\perp)}{nd} - \frac{st}{n^2}| = |\frac{(x^\perp)^T A(y^\perp)}{nd}| \leqslant \frac{\lambda n}{nd} = \frac{\lambda}{d}$$

co kończy dowód tezy zadania.