Zadanie 1

Oznaczmy przez A_k macierz incydencji grafu G_k. Graf G_{k+1} składa się z słów długości k z dołączoną jedną literą i dwa wierzchołki są połączone, jeśli litera jest różna a słowo identyczne, lub litera identyczna a słowa sąsiadują w G_k. Zatem

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & I \\ I & A_k \end{pmatrix}$$

Jeśli v jest wektorem własnym A_k o wartości własnej λ, to

$$A_{k+1}\begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & I \\ I & A_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k v + Iv \\ Iv + A_k v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+1)v \\ (1+\lambda)v \end{pmatrix} = (\lambda+1)\begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}$$

$$A_{k+1}\begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & I \\ I & A_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k v - Iv \\ Iv - A_k v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda-1)v \\ (1-\lambda)v \end{pmatrix} = (\lambda-1)\begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix}$$

Jeśli $S_k = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2^k}\}$ są liniowo niezależnymi wektorami własnymi A_k, to

$$S_{k+1} := \left\{ \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix} : v \in S_k \right\}$$

są wektorami własnymi A_{k+1} (co właśnie pokazaliśmy), również niezależnymi – przypuśćmy bowiem, że dla pewnej kombinacji liniowej

$$\sum_i \alpha_i \begin{pmatrix} v_i \\ v_i \end{pmatrix} + \sum_i \alpha'_i \begin{pmatrix} v_i \\ -v_i \end{pmatrix} = 0.$$

Wtedy

$$\begin{cases} \sum_i (\alpha_i + \alpha'_i) v_i = 0 \\ \sum_i (\alpha_i - \alpha'_i) v_i = 0 \end{cases}.$$

Pierwsza równość implikuje $\forall_i (\alpha_i + \alpha'_i) = 0$, bo v_i są niezależne, podobnie druga implikuje $\forall_i (\alpha_i - \alpha'_i) = 0$, a więc wszystkie α_i, α'_i są zerowe.

Dla $k = 1$ macierz

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ma wektory własne $S_1 = \{(1,1), (1,-1)\}$, czyli wartości własne 1 i -1.

Indukcyjnie, A_k ma wektory własne S_k o wartościach własnych $\{\lambda_i\} = \{-k, -k+2, \ \ldots, \ k-2, k\}$ o krotnościach $\binom{k}{\frac{k+i}{2}}$ (bo krotności tworzą trójkąt Pascala: wektory własne A_{k+1} o wartości własnej λ pochodzą od każdego wektora własnego A_k o wartości własnej $\lambda - 1$ lub $\lambda + 1$).

Zadanie 2

Oznaczmy przez $n = |V(G)|$, $a = |X| \leqslant \alpha n$, $b = |\bar{X}| \geqslant (1-\alpha)n$, $e = |E(X, \bar{X})|$. Rozważmy wektor $x = (x_i)_{i=1}^n$

$$x = \begin{cases} b & \text{dla } i \in X \\ -a & \text{dla } i \notin X \end{cases}$$

Dokładnie tak jak w dowodzie lematu 1 wykładu 7 pokazujemy, że x jest prostopadły do $\vec{1}$ oraz

$$\lambda_2 \geqslant \frac{x^T A x}{\|x\|^2} = d - \frac{e}{a}\frac{a+b}{b}$$

Zatem

$$e \geqslant \frac{b}{a+b}(d - \lambda_2)a$$

$$|E(X, \bar{X})| \geqslant \frac{b}{n}(d - \lambda_2)|X| \geqslant (1-\alpha)(d-\lambda_2)|X|.$$

Zadanie 3

Niech p_i będzie wektorem prawdopodobieństw rozkładu X_i, $v \sim e$ oznacza relację incydencji w G.
Losowanie krawędzi z F, potem jej końca, oznacza

$$p_0 = \frac{1}{2|F|} \sum_{e \in F} \sum_{v \sim e} e_v$$

Do każdego wierzchołka można przyjść z co najwyżej d krawędzi, więc każde p_0^v mieści się między 0 a $\frac{d}{2|F|}$. By zmaksymalizować $\|p_0\|^2 = \sum_v (p_0^v)^2$ opłaca się jak najbardziej zgrupować prawdopodobieństwa (bo $(a+b)^2 + 0^2 \geqslant a^2 + b^2$), stąd największą miarę p_0 może osiągnąć mając $\frac{1}{d/2|F|}$ wartości $p_0^v = \frac{d}{2|F|}$, a w pozostałych zera:

$$\|p_0\|^2 \leqslant \frac{1}{d/2|F|} \left(\frac{d}{2|F|}\right)^2 = \frac{d}{2|F|}.$$

Losowanie dowolnego sąsiada oznacza

$$p_i = \frac{A}{d} p_{i-1} = \left(\frac{A}{d}\right)^i p_0$$

Szukane prawdopodobieństwo, że przy przejściu z X_i do X_{i+1} wylosujemy krawędź z F, jest równe

$$\sum_{e \in F} \frac{1}{d} Pr(X_i \sim e) = \sum_{e \in F} \sum_{v \sim e} \frac{1}{d} Pr(X_i = v) = \frac{1}{d} \sum_{e \in F} \sum_{v \sim e} p_i^v = \frac{1}{d} \sum_{e \in F} \sum_{v \sim e} \langle e_v, p_i \rangle = \frac{2|F|}{d} p_0 \cdot p_i = \frac{2|F|}{d} \langle p_0, \left(\frac{A}{d}\right)^i p_0 \rangle =$$

(rozkładając $p_0 = p_{||} + p_\perp$ na wektor równoległy $p_{||} = \langle p_0, \frac{\vec{1}}{\sqrt{n}} \rangle \frac{\vec{1}}{\sqrt{n}} = \frac{\vec{1}}{n}$ i prostopadły $p_\perp = p_0 - p_{||}$)

$$= \frac{2|F|}{d} \left(\langle \frac{\vec{1}}{n}, \left(\frac{A}{d}\right)^i \frac{\vec{1}}{n} \rangle + 2 \langle p_\perp, \left(\frac{A}{d}\right)^i \frac{\vec{1}}{n} \rangle + \langle p_\perp, \left(\frac{A}{d}\right)^i p_\perp \rangle \right) =$$

(dwójka z symetryczności macierzy A, $\left(\frac{A}{d}\right)^i \frac{\vec{1}}{n} = \frac{d}{d} \cdot \frac{\vec{1}}{n}$)

$$= \frac{2|F|}{d} \left(\langle \frac{\vec{1}}{n}, \frac{\vec{1}}{n} \rangle + 2 \langle p_\perp, \frac{\vec{1}}{n} \rangle + \langle p_\perp, \left(\frac{A}{d}\right)^i p_\perp \rangle \right) =$$

($\langle p_\perp, \frac{\vec{1}}{n} \rangle = 0$, bo to wektory prostopadłe)

$$= \frac{2|F|}{d} \left(\frac{1}{n} + \langle p_\perp, \left(\frac{A}{d}\right)^i p_\perp \rangle \right) =$$

(z własności $\lambda_2 = \max_{v \perp \vec{1}} \frac{\langle v, Av \rangle}{\|v\|^2}$)

$$\leqslant \frac{2|F|}{d} \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{\lambda_2}{d}\right)^i \|p_\perp\|^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2|F|}{d} \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{\lambda_2}{d}\right)^i \|p_0\|^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2|F|}{d} \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{\lambda_2}{d}\right)^i \frac{d}{2|F|} \right) =$$

$$= \frac{2|F|}{dn} + \left(\frac{\lambda_2}{d}\right)^i =$$

(licząc końce krawędzi mamy $2|E| = dn$)

$$= \frac{|F|}{|E|} + \left(\frac{\lambda_2(G)}{d}\right)^i \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|F|}{|E|} + \left(\frac{\lambda(G)}{d}\right)^i.$$

(Mamy nawet mocniejszą tezę z λ_2 zamiast λ; intuicyjnie można zobaczyć, że nie ma np. patologicznych sytuacji w grafach dwudzielnych ($\lambda = |\lambda_n| = d$), bo patrzymy na krawędzie, nie na wierzchołki.)