Wybrane zagadnienia teorii grafów

Tomasz Kociumaka

4 czerwca 2013

Seria 5

Zadanie 1

Zauważmy, że $G_1 = K_2$ oraz $G_{k+1} = G_k \Box G_1$, ponieważ

$$\{wa, w'a'\} \in E(G_{k+1}) \Leftrightarrow (\{w, w'\} \in E(G_k) \wedge a = a') \vee (w = w' \wedge \{a, a'\} \in E(G_1))$$

Pokażemy indukcyjnie, że $spec(G_k)$ dla każdego $i \in \{0, \dots, k\}$ zawiera $\binom{k}{i}$-krotną wartość własną $k - 2i$. Oczywiście $spec(G_1) = \{1, -1\}$, gdyż G_1 jest 1-regularny, dwudzielny, więc dla $k = 1$ teza zachodzi. Z zadania 82.4 otrzymujemy $spec(G_{k+1}) = \{\lambda + 1 : \lambda \in spec(G_k)\} \sqcup \{\lambda - 1 : \lambda \in spec(G_k)\}$. Stąd dla każdego $i \in \{0, \dots, k+1\}$ w $spec(G_{k+1})$ jest $\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i}$-krotna wartość $k - 1 - 2(i-1) = k + 1 - 2i$.

Zadanie 2

Skorzystamy z dowodu Lematu 1 z notatek do wykładu 7. Przyjmiemy oznaczania z tego dowodu: G będzie d-regularnym multigrafem, $S \subseteq V(G)$. Niech ponadto $\bar{S} = V(G) \setminus S$, $a = |S|$, $b = n - |S|$ oraz $e = |E(S, \bar{S})|$.

W dowodzie wykazaliśmy następującą nierówność:

$$\lambda_2 \geqslant d - e\frac{a+b}{ab}.$$

Równoważnie możemy zapisać

$$e \geqslant \frac{ab}{a+b}(d - \lambda_2) = \frac{b}{a+b}(d - \lambda_2)|S| = \left(1 - \frac{|S|}{|V(G)|}\right)(d - \lambda_2)|S|.$$

Zauważmy, że $\frac{|S|}{|V(G)|}$ oznaczyliśmy w treści zadania przez α. Stąd otrzymujemy tezę, tj. nierówność

$$|E(S, V(G) \setminus S)| \geqslant (1 - \alpha)(d - \lambda_2)|S|.$$

Zadanie 3

Przypuśćmy, że mamy zmienną losową X o rozkładzie zadanym przez wektor x, losujemy wierzchołek zgodnie z tym rozkładem, a następnie wybieramy (z rozkładu jednostajnego) losową krawędź incydentną z wybranym wierzchołkiem. Obliczymy prawdopodobieństwo, że wybrana krawędź należy do F. Niech d_i oznacza liczbę krawędzi z F incydentną z i-tym wierzchołkiem. Oczywiście przy założeniu, że wybraliśmy ten wierzchołek, prawdopodobieństwo wynosi $\frac{d_i}{d}$. Wobec tego poszukiwane prawdopodobieństwo wynosi $\sum_i \frac{x_i d_i}{d} = \langle x, y \rangle$, gdzie $y_i = \frac{d_i}{d}$. W szczególności, jeśli x^i jest rozkładem X_i, to $\langle x^i, y \rangle$ jest równe prawdopodobieństwu, że przy przejściu z X_i to X_{i+1} wybierzemy krawędź z F.

Oczywiście $x^{i+1} = Ax^i$, gdzie dA jest macierzą sąsiedztwa G, a więc $x^i = A^i x^0$. Wyznaczmy rozkład x^0. Zauważmy, że prawdopodobieństwo wierzchołka i wynosi $\frac{d_i}{2|F|}$. Wynika to z faktu, że dla każdej krawędzi z $|F|$ incydentnej z tym wierzchołkiem prawdopodobieństwo jej wyboru to $\frac{1}{|F|}$, a potem prawdopodobieństwo wyboru jej ustalonego końca wynosi $\frac{1}{2}$ (ponieważ w F nie ma pętli).

Niech $x^0 = x_\| + x_\perp$, gdzie $x_\| = \langle x^0, \frac{1}{\sqrt{n}}\bar{1}\rangle \frac{1}{\sqrt{n}}\bar{1}$. Ponieważ $\bar{1}$ jest wektorem własnym A z wartością 1, to

$$\langle A^i x_\|, y\rangle = \langle x_\|, y\rangle = \left\langle x^0, \frac{1}{\sqrt{n}}\bar{1}\right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{n}}\bar{1}, y\right\rangle = \frac{1}{n}\left(\sum_i \frac{d}{2|F|}\right)\left(\sum_i \frac{d_i}{d}\right) = \frac{1}{2nd|F|}\left(\sum_i d_i\right)^2 = \frac{2|F|}{nd} = \frac{|F|}{|E|}.$$

W przestrzeni prostopadłej do $\bar{1}$ wartości własne mają moduł nie przekraczający $\frac{\lambda}{d}$, a więc

$$\langle A^i x_\perp, y\rangle \leqslant \|A^i x_\perp\|\|y\| \leqslant \left(\frac{\lambda}{d}\right)^i \|x_\perp\|\|y\| \leqslant \left(\frac{\lambda}{d}\right)^i \|x^0\|\|y\| = \left(\frac{\lambda}{d}\right)^i \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{2|F|d} \leqslant \left(\frac{\lambda}{d}\right)^i \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{2|F|} = \left(\frac{\lambda}{d}\right)^i.$$

Stąd

$$\langle x^i, y\rangle = \langle A^i x^0, y\rangle = \langle A^i(x_\| + x_\perp), y\rangle = \langle A^i x_\|, y\rangle + \langle A^i x_\perp, y\rangle \leqslant \frac{|F|}{|E|} + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^i,$$

a jak wcześniej pokazaliśmy x^i to rozkład X_i a $\langle x^i, y\rangle$ jest równe prawdopodobieństwu, że krawędź między X_i a X_{i+1} należy do F.