Zadanie 1

W grafie dwudzielnym nie ma cykli długości nieparzystej, więc wszystkie ściany przylegają do przynajmniej 4 krawędzi. Stąd posumowanie długości ścian daje $2e = \sum_f \text{len}(f) \geqslant 4f$. Gdyby wszystkie wierzchołki były stopnia co najmniej 4, posumowanie tych stopni dałoby $2e = \sum_v \deg(v) \geqslant 4v$. Suma tych nierówności daje $2e + 2e \geqslant 4f + 4v$, czyli $0 \geqslant 4(v - e + f) = 4 \cdot 2$ (lub ponad $4 \cdot 2$ jeśli graf jest niespójny), sprzeczność – musi więc istnieć wierzchołek o stopniu co najwyżej 3.

Zadanie 2

Niech $G' = \text{Wstaw}(G, v \to H)$. Wierzchołki G' naturalnie dzielą się na $V(G') \cap (V(G) \setminus \{v\})$ oraz $V(G') \cap V(H)$.

Przypuśćmy przeciwnie, że G' nie jest doskonały, a więc na mocy twierdzenia o grafach doskonałych zawiera podgraf indukowany $X \subset G'$ będący nieparzystą dziurą lub antydziurą (cyklem długości $2k+1$ dla $k \geqslant 2$ lub jego dopełnieniem). Bez straty ogólności jest to dziura, gdyż antydziura w dopełnieniu też jest dziurą, a dopełnienie $\text{Wstaw}(G, v \to H)$ to dokładnie $\text{Wstaw}(\bar{G}, v \to \bar{H})$ (zbiór wierzchołków ten sam, krawędzie wewnątrz $V(G) \setminus \{v\}$ i $V(H)$ zachowane, zaś każda krawędź między $x \in V(G) \setminus \{v\}$ a $y \in V(H)$ pojawia się wtw gdy x jest sąsiadem v w $\bar{G}$, wtw gdy nie jest sąsiadem w G, wtw gdy nie pojawia się w $\text{Wstaw}(G, v \to H)$).

Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}\}$ będzie dziurą indukowaną w G'. Podzielmy X na $X_G = X \cap (V(G) \setminus \{v\})$ oraz $X_H = X \cap V(H)$.

Jeśli co najwyżej jeden wierzchołek należy do X_H, to X jest też podgrafem indukowanym G (gdy ewentualny wierzchołek X_H zastąpić wierzchołkiem v), co przeczy założeniu, że G jest doskonały. Jeśli żaden wierzchołek nie należy do X_G, to X jest też podgrafem indukowanym H, co przeczy założeniu, że H jest doskonały. Zatem $|X_H| \geqslant 2$ oraz $|X_G| \geqslant 1$, przy czym $|X_H| + |X_G| = |X| \geqslant 5$.

Każdy wierzchołek X ma stopień w X równy 2. Niech Y_G oznacza podzbiór tych wierzchołków X_G, które są sąsiadami v w G. Tylko wierzchołki Y_G sąsiadują z X_H, więc Y_G zawiera przynajmniej jeden wierzchołek. Wierzchołki Y_G są też połączone ze wszystkimi wierzchołkami X_H, stąd $|X_H| \leqslant 2$, czyli $|X_H| = 2$. Wierzchołki X_H nie może łączyć krawędź (wpp tworzyłyby trójkąt z wierzchołkiem Y_G), obaj sąsiedzi obu tych wierzchołków nich muszą więc leżeć w Y_G, czyli $|Y_G| \geqslant 2$. Oba łączą się jednak ze wszystkimi wierzchołkami Y_G, tworzą więc cykl czteroelementowy. X nie zawiera żadnych mniejszych cykli, mamy więc sprzeczność.

Zadanie 3

Przypuśćmy przeciwnie, że mam graf planarny o minimalnym stopniu 3 taki, że wierzchołki każdej krawędzi mają sumę $\geqslant 14$. Niech *duży* wierzchołek oznacza wierzchołek o stopniu $\geqslant 7$, *mały* o stopniu $\leqslant 6$. Zauważmy, że na każdej krawędzi istnieje przynajmniej jeden duży wierzchołek (wpp suma stopni byłaby co najwyżej $6 + 6$).

Bez straty ogólności wszystkie ściany tego grafu są trójkątami, gdybyśmy bowiem mieli ścianę długości $\geqslant 4$, można znaleźć na niej dwa duże wierzchołki (bo sąsiedzi każdego małego muszą być duzi), które po połączeniu dzielą ścianę na dwie – stopnie tylko przy tym rosną, a nowa krawędź ma sumę stopni $\geqslant 14$, więc indukcyjnie możemy tak striangulyzować graf. Sumując długości każdej ściany mamy $3f = 2e$, czyli $2 = v - e + f = v - e + \frac{2}{3}e = v - \frac{1}{3}e$.

Każdemu wierzchołkowi dajmy na początek $12 - 2\deg(v)$ ładunku. W sumie stworzymy $\sum_v (12 - 2\deg(v)) = 12v - 2 \cdot 2e = 12(v - \frac{1}{3}e) = 12 \cdot 2 > 0$ ładunku. Wierzchołki o dodatnim początkowym ładunku rozdają go po równo sąsiadom, a więc każdy wierzchołek o stopniu 3 (z ładunkiem początkowym 6) daje sąsiadom po 2, wierzchołek o stopniu 4 daje sąsiadom po 1, wierzchołek o stopniu 5 daje sąsiadom po $\frac{2}{5}$.

Małe wierzchołki pozbywają się w ten sposób swojego ładunku, dodatni ładunek mogą więc mieć tylko sąsiedzi wierzchołków o stopniu $\leqslant 5$, czyli wierzchołki o stopniu $\geqslant 14 - 5 = 9$. Niech x będzie takim wierzchołkiem. Niech d_i oznacza liczbę sąsiadów x o stopniu i, zaś d_{i+} oznacza liczbę sąsiadów o stopniu i lub większym. Ładunek x wynosi $12 - 2\deg(x) + 2d_3 + d_4 + \frac{2}{5}d_5 = 12 - d_4 - \frac{8}{5}d_5 - 2d_{6+}$. Wierzchołek x ma $\geqslant 9$ sąsiadów, wszystkie ściany są trójkątne, więc wszyscy sąsiedzi są połączeni w cykl długości $\deg(x)$. Sąsiedzi małych wierzchołków są duzi, więc przynajmniej połowa wierzchołków cyklu jest duża – x ma $\geqslant \lceil \frac{\deg(x)}{2} \rceil \geqslant \lceil \frac{9}{2} \rceil = 5$ dużych sąsiadów.

Mamy $12 - d_4 - \frac{8}{5}d_5 - 2d_{6+} > 0$ (ładunek x jest większy od zera), czyli $d_{6+} < 6$, więc x ma dokładnie 5 dużych sąsiadów i żadnego stopnia 6, $d_{6+} = 5$. Stąd $2 - d_4 - \frac{8}{5}d_5 > 0$, czyli $d_4 + d_5 < 2$, czyli co najwyżej jeden mały wierzchołek ma stopień inny niż trzy. Jednak wierzchołek x ma $\deg(x) - 5 \geqslant 4$ małych sąsiadów, a więc przynajmniej jeden z nich jest stopnia 3, czyli sam x musi mieć stopień co najmniej 11. Wiemy jednak, że ma $\geqslant \lceil \frac{\deg(x)}{2} \rceil$ dużych sąsiadów, co przy tak dużym stopniu daje już 6 dużych sąsiadów, sprzeczność.