Przemysław Wenus - Seria 4

Zadanie 1

Niech G będzie grafem planarnym i dwudzielnym. Ponadto niech w oznacza liczbę wierzchołków, k liczbę krawędzi, s liczbę ścian grafu G. Ze wzoru Eulera $w-k+s=2$. Ponieważ G jest planarny, to nie ma w nim cykli nieparzystej długości, więc każda ściana ograniczona jest przynajmniej czterema krawędziami. Każda krawędź oddziela dwie ściany zatem $4s \leqslant 2k$ czyli $2s \leqslant k$.

$$4 = 2w - 2k + 2s \leqslant 2w - 2k + k = 2w - k$$

$$k \leqslant 2w - 4$$

Policzmy średni stopień w grafie G.

$$\frac{1}{w} \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \frac{2k}{w} \leqslant \frac{4w-8}{w} < 4$$

Ponieważ średni stopień jest mniejszy od 4, to w grafie musi istnieć wierzchołek o stopniu co najwyżej 3.

Zadanie 2

Indukcja ze względu na sumę wierzchołków $|V(G)| + |V(H)|$. Dla $|V(G)| + |V(H)| = 2$ teza jest oczywista. Niech G, H będą grafami doskonałymi i $v \in V(G)$ oraz $L = \mathrm{Wstaw}(G, v \to H)$. Załóżmy, że dla mniejszych grafów teza zachodzi. Wystarczy pokazać, że $\omega(L) = \chi(L)$, bo każdy podgraf indukowany grafu L ma postać $\mathrm{Wstaw}(G', v \to H)$ lub $\mathrm{Wstaw}(G, v \to H')$ gdzie G' to podgraf indukowany grafu G, a H' podgraf indukowany grafu H. Więc każdy podgraf indukowany grafu L jest doskonały z założenia indukcyjnego.

Niech $R = \mathrm{Wstaw}(G, v \to K_{\omega(H)})$, gdzie $K_{\omega(H)}$ oznacza najliczniejszą klikę grafu H. Graf R jest podgrafem indukowanym grafu L, zatem $\omega(L) \geqslant \omega(R)$. Graf R jest izomorficzny z grafem, który powstaje z G przez klonowanie wierzchołka v. Zatem z lematu o klonowaniu wierzchołków graf R jest doskonały, czyli $\omega(R) = \chi(R)$. Aby zakończyć dowód zauważmy jeszcze, że $\chi(R)$ kolorów wystarczy aby pokolorować graf L. Graf H jest doskonały, wiec wystarczy $\omega(H)$ kolorów aby go pokolorować. Czyli na wierzchołki z $V(H)$ w grafie L możemy użyć kolorów, których użyliśmy na $K_{\omega(H)}$ w kolorowaniu grafu R, a wierzchołki z $V(G) \backslash \{v\}$ w grafie L możemy pokolorować tak samo jak odpowiadające im w grafie R. Ponieważ $K_{\omega(H)}$ w R „widzi” te same wierzchołki co H w L, to nie ma, żadnych konfliktów kolorów.

$$\omega(L) \geqslant \omega(R) = \chi(R) \geqslant \chi(L) \geqslant \omega(L)$$

czyli $\omega(L) = \chi(L)$

Zadanie 3

Przypuśćmy, że G jest kontrprzykładem. Czyli G jest grafem planarnym o minimalnym stopniu co najmniej 3, oraz dla każdej pary sąsiadujących wierzchołków u i v, $\deg(u) + \deg(v) \geqslant 14$. Pokażę, że G wcale nie jest kontrprzykładem. Jeżeli na ścianie długości co najmniej 4 wszystkie wierzchołki mają stopień co najmniej 6 to bez strat ogólności można dodać cięciwę. Jeżeli w nowo powstałym grafie znajdziemy wierzchołki o sumie stopni najwyżej 13, to mamy pewność, że nie są one połączone cięciwą bo łączy ona wierzchołki o sumie stopni co najmniej $7 + 7 = 14$. Ponadto bez tej cięciwy wierzchołki te nadal mają sumę stopni najwyżej 13. Jeżeli na ścianie długości co najmniej 4 istnieje wierzchołek o stopniu co najwyżej 5, to jego sąsiedzi na ścianie mają stopień co najmniej 8 i znów bez strat ogólności można połączyć je krawędzią. W ten sposób możemy striangulować wszystkie ściany. Tak powstały graf G' nadal musi być kontrprzykładem, bo gdyby nie był, to G też by nie był.

Każdemu wierzchołkowi dajemy początkowy ładunek $6 - \deg(v)$. Całkowita suma ładunku w grafie wynosi $\sum_v (6 - \deg(v)) = 6|V| - \sum_v \deg(v) = 6|V| - 2|E| \geqslant 12$. Niech teraz wszystkie wierzchołki stopnia najwyżej 5 oddadzą po równo cały swój ładunek sąsiadom. Czyli wierzchołki stopnia 5 oddają każdemu sąsiadowi $\frac{1}{5}$ ładunku, wierzchołki stopnia 4 po $\frac{1}{2}$, a wierzchołki stopnia 3 oddają po 1 ładunku. Któryś wierzchołek ma dodatni ładunek, ale wierzchołki o stopniu:

- najwyżej 8 sąsiadują z wierzchołkami o stopniu co najmniej 6, więc ich ładunek spadł do 0 lub się nie zmienił, więc nie może być dodatni.
- dokładnie 9 mogły otrzymać ładunek tylko od wierzchołków stopnia 5, więc ich ładunek wynosi co najwyżej $6 - 9 + 9 \cdot \frac{1}{5} = -1.2$.
- dokładnie 10 mogły otrzymać ładunek tylko od wierzchołków stopnia 5 i 4, a takich wierzchołków w sąsiedztwie jest najwyżej 5 (gdyby było ich 6 to, któreś z nich musiałyby ze sobą sąsiadować bo graf jest striagulowany), więc ich ładunek wynosi co najwyżej $6 - 10 + 5 \cdot \frac{1}{2} = -1.5$.
- dokładnie 11 mają w sąsiedztwie najwyżej 5 wierzchołków o stopniu co najwyżej 5 więc ich ładunek wynosi co najwyżej $6 - 11 + 5 \cdot 1 = 0$
- $d \geqslant 12$ mają w sąsiedztwie najwyżej $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ wierzchołków o stopniu co najwyżej 5, wiec ich ładunek wynosi co najwyżej $6 - d + \lfloor \frac{d}{2} \rfloor \leqslant 6 - \frac{d}{2} \leqslant 6 - \frac{12}{2} = 0$

Zatem otrzymaliśmy sprzeczność, kontrprzykład nie może istnieć.