Wybrane zagadnienia teorii grafów

Tomasz Kociumaka

19 kwietnia 2013

Seria 3

Zadanie 1

Przez $P_G(k)$ będziemy oznaczać liczbę k-kolorowań grafu G. Na początku zauważmy, że badany warunek spełniają wyłącznie grafy spójne. Jest to konsekwencją następującego lematu:

Lemat 1. *Niech G będzie grafem o dokładnie s spójnych składowych, a k liczbą całkowitą dodatnią. Wówczas $k^s \mid P_G(k)$.*

Dowód. Zauważmy, że na zbiorze wszystkich k-kolorowań grafu G w sposób wolny działa grupa $\mathbb{Z}_k^s$, gdzie i-ty generator odpowiada cyklicznemu przesunięciu kolorów w i-tej współrzędnej grafu G. $\square$

Spójność grafów spełniających podany warunek wynika teraz z zastosowania lematu dla dowolnej wartości $k \geqslant 2$, gdyż $k(k-1)^{|V|-1} \equiv \pm k \not\equiv 0 \pmod{k^2}$.

Teraz pokażemy, że rozważany warunek charakteryzuje drzewa (rozpatrujemy tylko grafy proste). Posłuży nam do tego lemat:

Lemat 2. *Niech T będzie drzewem, a T' jego niepustym poddrzewem T. Wówczas każde k-kolorowanie (dla $k \geqslant 1$) poddrzewa T' rozszerza się na na dokładnie $(k-1)^{|V(T)|-|V(T')|}$ k-kolorowań drzewa T.*

Dowód. Indukcja po $q = |V(T)| - |V(T')|$. Baza indukcji dla $q = 0$ zachodzi trywialnie. Dla dowodu kroku indukcyjnego weźmy wierzchołek $v \in N_T(V(T'))$. Wówczas kolorowania $T'' = T' + v$ powstają z kolorowań T' przez pokolorowanie v na jeden z $k-1$ kolorów (zabroniony jest kolor sąsiada v leżącego w T'). Na mocy założenia indukcyjnego każde z tych $k-1$ kolorowań rozszerza się na $(k-1)^{|V(T)|-|V(T')|-1}$ sposobów, co natychmiast daje tezę. $\square$

Prostym wnioskiem z powyższego lematu jest fakt, że liczba k-kolorowań drzewa o n wierzchołkach wynosi $k(k-1)^{n-1}$ (jest dokładnie k kolorowań dla T' jednowierzchołkowego i dalej na mocy lematu). W konsekwencji wszystkie drzewa spełniają rozpatrywany warunek.

Pokażemy teraz, że dowolny spójny graf G, który nie jest drzewem, ma mniej niż $3 \cdot 2^{|V(G)|-1}$ 3-kolorowań, a więc nie spełnia badanego warunku. Niech $T \neq G$ będzie drzewem rozpinającym G i niech $e = uv \in E(G) - E(T)$. Graf G jest prosty, więc w T wierzchołki u i v łączy ścieżka o co najmniej jednym wierzchołku wewnętrznym. Ścieżkę taką można pokolorować w następujący sposób: końce w kolorze 1., wierzchołki wewnętrzne naprzemiennie w kolorach 2. i 3. Jest to 3-kolorowanie spójnego poddrzewa drzewa T, więc na mocy lematu rozszerza się do niezerowej liczby 3-kolorowań całego drzewa.

Każde kolorowanie G jest kolorowaniem K, więc zbiór 3-kolorowań grafu G jest właściwym podzbiorem zbioru 3-kolorowań drzewa T. W szczególności $P(G,3) < P(T,3) = 3 \cdot 2^{|V(G)|-1}$, czyli G nie spełnia rozważanego warunku. Spełniają go zatem wyłącznie drzewa.

Zadanie 2

Rozważmy ustaloną dekompozycję piotrusiową (T, π) szerokości p grafu G. Dla każdej krawędzi e drzewa T niech $E_e \subseteq E(G)$ będzie zbiorem krawędzi grafu G, których końce leżą w różnych składowych lasu $T - e$, a $V_e \subseteq V(G)$ – zbiorem końców tych krawędzi. Dla węzła $t \in T$ niech $V_t = \bigcup_{e \in \delta_T(t)} V_e$, przy czym dla liści dodatkowo dołączamy do zbioru V_t wierzchołek $\pi^{-1}(t)$.

Pokażemy, że drzewo T wraz ze zbiorami V_t tworzy dekompozycję drzewiastą grafu G o szerokości $\leqslant 3p$. Z definicji mamy $|E_e| \leqslant p$, a zatem $|V_e| \leqslant 2p$ dla każdej krawędzi e. Każdy węzeł wewnętrzny $t \in T$ jest incydentny z dokładnie trzema krawędziami. Przy tym, jeśli dana krawędź występuje w $\bigcup_{e \in \delta_T(t)} E_e$, to występuje w co najmniej w dwóch spośród tych zbiorów. W konsekwencji podobnie jest z wierzchołkami. Wobec tego $|V_t| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{e \in \delta_t(T)} |V_e| \leqslant 3p$. Jeśli zaś t jest liściem, to t jest incydentne tylko z jedną krawędzią e, ale być może zawiera dodatkowo wierzchołek $\pi^{-1}(t)$. Stąd $|V_t| \leqslant |V_e| + 1 \leqslant 2p + 1 \leqslant 3p + 1$. Każdy ze zbiorów V_t liczy zatem co najwyżej $3p + 1$ elementów. Dzięki dodatkowym wierzchołkom dla liści mamy $\bigcup V_t = V$. Ponadto, jak łatwo zauważyć, mamy $uv \in E_e$ dokładnie wtedy, gdy e leży na ścieżce w T łączącej $\pi(u)$ z $\pi(v)$, a więc $T_v = \{t : v \in V_t\}$ dla ustalonego T jest sumą $\{\pi(v)\}$ oraz ścieżek łączących $\pi(v)$ z wierzchołkami $\pi(u)$ dla $u \in N_G(v)$, w szczególności T_v indukuje spójne poddrzewo drzewa T. Sprawdziliśmy zatem wszystkie warunki w definicji dekompozycji drzewiastej.

Zadanie 3

Dla grafu G niech $\omega(G, v) = \omega(G[N[v]])$, gdzie $G[N[v]]$ jest podgrafem G indukowanym przez otoczenie v. Dla grafu doskonałego G utworzymy przez klonowanie wierzchołków graf H, dla którego $\omega(H, v) = \omega(G)$ dla każdego $v \in V(H)$. Wystarczy w tym celu zastosować następującą procedurę: zacznij od $H = G$ i dopóki w H istnieje $v \in V(H)$, dla którego $\omega(H, v) < \omega(G)$ dodaj $\omega(G) - \omega(H, v)$ kopii wierzchołka v. Pokażemy, że $\omega(H) = \omega(G)$ pozostaje jej niezmiennikiem. Przypuśćmy, że tak nie jest i w pewnym momencie, tworząc graf H' z grafu H przez k-krotne sklonowanie v utworzyliśmy klikę wielkości $\omega(H') > \omega(H) = \omega(G)$. Z maksymalności kliki, zawiera ona wszystkie utworzone k kopii wierzchołka v, jaki i sam wierzchołek v. W szczególności klika rozmiaru $\omega(H') - k$ leży w $H[N[v]]$, skąd $\omega(H, v) \geqslant \omega(H') - k > \omega(G) - k$. Z definicji jednak $k = \omega(G) - \omega(H, v)$, co daje sprzeczność. Łatwo dodatkowo zauważyć, że ta procedura zmniejsza liczbę wierzchołków, dla których $\omega(H, v) < \omega(G)$, więc zawsze się skończy, co dowodzi jej pełnej poprawności.

Zauważmy, że wraz z grafem H otrzymujemy surjekcję $f : V(H) \to V(G)$ zachowującą zarówno krawędzie, jak i niekrawędzie (kopiom przypisujemy oryginał). Taka funkcja f odwzorowuje zbiory niezależnie i kliki odpowiednio w zbiory niezależnie i kliki. Tym samym opisaną w zadaniu konstrukcję wystarczy przeprowadzić dla grafu H.

Graf H jest doskonały, więc posiada kolorowanie na $\omega(H) = \omega(G)$ kolorów. Rodzinę $\mathcal{A}$ zdefiniujemy jako rodzinę klas odpowiadających poszczególnym kolorom. Rodzinę $\mathcal{K}$ zdefiniujemy zaś jako rodzinę wszystkich klik wielkości $\omega(G)$. Natychmiast widać, że $\bigcup \mathcal{A} = V(H)$. Dla $\mathcal{K}$ analogiczna własność wynika z faktu, że dla każdego $v \in V(H)$ zachodzi $\omega(H, v) = \omega(G)$. Przy kolorowaniu wierzchołki kliki $K \in \mathcal{K}$ muszą być pokolorowane na różne kolory, więc na mocy $|K| = \omega(G)$ każdy spośród kolorów musi zostać użyty do K w kolorowaniu H, a więc K przecina wszystkie $A \in \mathcal{A}$. Wskazane rodziny $\mathcal{A}$ i $\mathcal{K}$ spełniają więc wszystkie pożądane warunki.