Zadanie 1

Jeśli szerokość drzewiasta grafu G wynosi co najmniej $c^{t'^5}$, to z twierdzenia o kracie G ma jako minor kratę $t' \times t'$. Krata taka zawiera $\lfloor \frac{t'}{2} \rfloor^2$ rozłącznych wierzchołkowo cykli długości cztery – oczka kraty o obu parzystych współrzędnych. Skoro jest minorem G, to G również zawiera tyle rozłącznych cykli, bo operacje usunięcia wierzchołka, usunięcia krawędzi i ściągnięcia krawędzi nie mogą zwiększyć liczby rozłącznych wierzchołkowo cykli.

Zatem jeśli G nie ma tylu rozłącznych cykli, to jego szerokość drzewiasta wynosi co najwyżej $c^{t'^5}$. Dla każdego k istnieje takie t', że $\lfloor \frac{t'}{2} \rfloor^2 \geqslant k$ i wtedy dla $t = c^{t'^5}$ prawdziwe jest zdanie z zadania.

Zadanie 2

Przykładem $G_{t,k}$ jest suma rozłączna k pięcioelementowych klik K_5 i kraty $t \times t$.

- Usunięcie mniej niż k wierzchołków pozostawia którąś K_5 nieruszoną (jako podgraf, a więc i jako minor), więc powstały graf nie jest planarny.
- 6-wierzchołkowa klika nie jest minorem ani K_5, ani kraty $t \times t$ (bo krata jest planarna, więc nie ma minora K_5), większa klika także więc nie może być minorem ich rozłącznej sumy.
- Szerokość drzewiasta rozłącznej sumy wynosi tyle, co maksimum szerokości drzewiastych spójnych składowych, a więc co najmniej tyle co szerokość drzewiasta kraty $t \times t$, czyli co najmniej t.

Zadanie 3

Przypuśćmy przeciwnie, że $V_{t_1} \neq V_{t_2}$ i niech $t_1 = s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{|s|} = t_2$ będzie ścieżką $t_1 - t_2$ w drzewie T. Niech i najmniejsze takie że $V_{s_i} \neq V_{s_{i+1}}$. Wtedy $S = V_{s_i} \cap V_{s_{i+1}}$ jest separatorem wielkości $\leqslant k$ (bo torby są wielkości $\leqslant \mathrm{tw}(G) + 1 = k + 1$ i nie są identyczne), przecinającym wszystkie ścieżki między V_{t_1} a V_{t_2}.

S jest za mały by trafiać cały cierń rzędu $k + 1$, więc dla pewnego $B \in \mathbb{B}$ żaden element $x \in S$ nie należy do B. Jednak B jest trafiany przez V_{t_1} i V_{t_2}, czyli istnieje $x_1 \in V_{t_1} \cap B$ oraz $x_2 \in V_{t_2} \cap B$. Wiemy, że B jest spójny, więc istnieje ścieżka $x_1 - x_2$ w B, która musi przechodzić przez S, sprzeczność.