Zadanie 1

$\mathrm{tw}(H) \leqslant \mathrm{tw}(G)+2$:
Z optymalnej dekompozycji G można zrobić dekompozycję H dodając a, c do każdego worka i doczepiając do korzenia dwa worki $\{a,b,c\}, \{a,d,c\}$. Szerokość tej dekompozycji jest o 2 większa (graf G był niepusty, więc trzyelementowe worki nie pogorszą szerokości). Wszystkie krawędzie do a, c są pokryte, krawędzie ab, bc, cd, da są pokryte przez te dodatkowe dwa worki. Zbiory worków zawierające $v \in V(G)$ pozostają bez zmian, zbiór worków zawierających a jest całym drzewem, podobnie c, zbiór worków zawierających b jest jednoelementowy, podobnie d – wszystkie są spójnymi poddrzewami w dekompozycji.

$\mathrm{tw}(G) \leqslant \mathrm{tw}(H)-2$:
Rozważmy optymalną dekompozycję H. Jeśli sąsiadują dwa worki, z którego jeden jest podzbiorem drugiego, ściągamy je do jednego. Rozważmy dowolne sąsiednie worki X, Y – żaden nie jest podzbiorem drugiego, więc istnieje $x \in X \setminus Y$ oraz $y \in Y \setminus X$. Z lematu z wykładu $X \cap Y$ separuje x od y, ale a, c należą do domkniętych sąsiedztw obu, więc muszą należeć do separatora, czyli obu worków. Każdy worek zawiera więc a, c (gdyby był worek bez sąsiadów to, jako jedyny worek dekompozycji, zawierałby wszystkie wierzchołki), po usunięciu a, b, c, d otrzymujemy zatem dekompozycję grafu G o szerokości mniejszej o co najmniej 2.

Zadanie 2

Porządek ten jest WQO. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje nieskończony ciąg malejący. Długości krotek nie mogą w nim rosnąć, więc od pewnego momentu są stałe. Porządek na krotkach ustalonej długości l jest zaś WQO (uogólnienie zadania 1.1 z ćwiczeń – znajdujemy nieskończony podciąg, w którym pierwsza współrzędna jest niemalejąca ($\leqslant$), w nim podciąg w którym druga współrzędna jest niemalejąca, itd.), więc taki ciąg malejący nie może istnieć.

Przypuśćmy, że istnieje nieskończony antyłańcuch. Definiujemy inducyjnie a_i jako dowolną krotkę minimalną wśród krotek dla których istnieje nieskończony antyłańcuch zaczynający się od $(a_0, \ldots, a_i)$ (jeśli dla każdej istniałaby mniejsza, mielibyśmy ciąg zstępujący). Z definicji każde a_i jest nieporównywalne z poprzednimi elementami ciągu, więc jest to antyłańcuch. Rozważmy ciąg a_i^1 pierwszych elementów każdej krotki (pusta krotka jest porównywalna z każdą inną, więc nie może należeć do antyłańcucha) i ciąg krotek b_i otrzymanych przez obcięcie pierwszego elementu ($a_i = a_i^1 b_i$). Przypuśćmy, że w $\{b_i : i \in \mathbb{N}\}$ istnieje antyłańcuch $(b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots)$. Niech m będzie pewnym indeksem, takim że $a_0, \ldots, a_{m-1}$ są nieporównywalne z $b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots$ (w szczególności $m = 0$ zawsze jest takim indeksem). Jeśli $a_m \leqslant b_{i_k}$ dla pewnego k, to $a_m \leqslant b_{i_k} < a_{i_k}$ – sprzeczność, bo a było antyłańcuchem. Jeśli $a_m > b_{i_k}$ dla pewnego k, to $(a_0, \ldots, a_{m-1}, b_{i_k}, b_{i_{k+1}}, \ldots)$ jest antyłańcuchem, co przeczy minimalności a_m. Zatem a_m też musi być nieporównywalne z $b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots$, przez indukcję zachodzi to dla każdego m, ale b_{i_0} jest porównywalne z a_{i_0}, sprzeczność.

W $\{b_i : i \in \mathbb{N}\}$ nie ma antyłańcucha, nie ma też nieskończonego ciągu malejącego, relacja z zadania jest więc WQO na tym zbiorze, czyli istnieje ciąg $b_{i_0} \leqslant b_{i_1} \leqslant \ldots$. Ciąg odpowiednich pierwszych elementów $a_{i_0}^1, a_{i_1}^1, \ldots$ jest ciągiem w $\mathcal{A}$, więc istnieją pewne indeksy $s < t$, że $a_{i_s}^1 \leqslant a_{i_t}^1$. Mamy także $b_{i_s} \leqslant b_{i_t}$, zatem $a_{i_s} \leqslant a_{i_t}$, a więc nie mogło być antyłańcucha. $\square$

Zadanie 3

Każda operacja zmniejsza liczbę wierzchołków lub krawędzi, więc nie ma nieskończonego ciągu malejącego w tym porządku. Przypuśćmy, że istnieje antyłańcuch.

Jeżeli są w nim grafy o dowolnie dużych skojarzeniach (zbiorach niesąsiadujących krawędzi), to pierwszy graf G_0 z ciągu możemy otrzymać z grafu o skojarzeniu wielkości $|E(G_0)|$ przez usunięcie wszystkich innych krawędzi, ustalenie bijekcji między krawędziam skojarzenia i krawędziami G_0 i ściągnięcie tych końców krawędzi, którym odpowiada ten sam wierzchołek.

Jeśli zaś rozmiar skojarzenia we wszystkich grafach antyłańcucha jest ograniczony przez pewną liczbę M, to wszystkie mają pokrycie wierzchołkowe wielkości $\leqslant 2M$ – wystarczy wziąć oba wierzchołki każdej krawędzi w dowolnym zachłannym maksymalnym skojarzeniu. Dla każdego grafu wybierzmy więc takie pokrycie i podzielmy grafy na grupy w zależności od grafu indukowanego przez wierzchołki tego pokrycia – możliwości jest skończenie wiele ($\leqslant 2^{(2M)^2}$), więc któraś grupa ma nieskończenie wiele elementów. Jest to nieskończony antyłańcuch grafów, które składają się z pewnego ustalonego grafu H (indukowanego przez pokrycie wierzchołkowe) i pozostałych wierzchołków – wierzchołki te między sobą nie mają krawędzi, bo nie byłyby pokryte. Zatem grafy te są jednoznacznie wyznaczone przez określenie, dla każdego podzbioru $X \subseteq V(H)$, ile wierzchołków v poza H ma sąsiedztwo $N(v)$ równe dokładnie X. Jeżeli dla pewnej pary grafów odpowiadające liczby są zawsze większe-równe, to jeden jest podgrafem drugiego. Jednak w ciągu krotek $2^{|V(H)|}$ elementowych z takim porządkiem zawsze istnieje para porównywalna (uogólnienie ćwiczenia 1.1), więc istnieją dwa grafy porównywalne w relacji bycia podgrafem, a więc także w relacji z zadania.