Krzysztof Gogolewski, 262935, WZTG I seria

1.

a) $\mathrm{tw}(H) \leqslant \mathrm{tw}(G) + 2$

Weźmy dekompozycję drzewiastą T grafu G. Do każdego worka dołóżmy a, c. Dodajmy gdziekolwiek worki $\{a, c, b\}$ i $\{a, c, d\}$. Łatwo sprawdzić że to dekompozycja drzewiasta grafu H o szerokości $\mathrm{tw}(G) + 2$.

b) $\mathrm{tw}(G) \leqslant \mathrm{tw}(H) - 2$

Zdefiniujmy operację $\varphi(G)$ w której do grafu G dołączamy nowy wierzchołek v i krawędzie (u, v) dla każdego $u \in G$. Widać, że $\varphi(\varphi(H))$ jest podgrafem H. Wystarczy więc pokazać $\mathrm{tw}(G) \leqslant \mathrm{tw}(\varphi(G)) - 1$.

Niech T będzie dekompozycją drzewiastą grafu $\varphi(G)$. Pomalujmy na czerwono worki w których jest u. Tworzą one poddrzewo. Ponieważ u sąsiaduje z wszystkim, każdy wierzchołek grafu jest w jakimś czerwonym worku. Pokażę, że worki nieczerwone można usunąć i nadal to będzie dekompozycja. Stąd będzie wynikać teza, bo w dekompozycji $\varphi(G)$ wywalimy z każdego worka v i dostaniemy dekompozycję G szerokości o jeden mniejszą.

Weźmy jakiś worek nieczerwony A którego ojciec B jest czerwony. Worek A wraz ze swoimi dziećmi zawiera jakiś podzbiór wierzchołków X. Ale wszystkie elementy X muszą gdzieś być w czerwonym worku, zatem (ze spójności) muszą być koniecznie w B. Zatem B zawiera wszystkie elementy zbioru X i równie dobrze można wyrzucić worek A wraz z dziećmi, warunki dekompozycji nadal będą spełnione.

2.

Weźmy nieskończony ciąg malejący $a_1 > a_2 > \ldots$. Patrząc na długości ciągów a_i, muszą one być niemalejące, a więc się stabilizować. Tak więc bez straty ogólności wszystkie długości są takie same, powiedzmy k, i mamy zatem podciąg z A^k porządkowany po współrzędnych. Na każdym kroku przynajmniej jedna współrzędna opada. To oznacza, że któraś ze współrzędnych opada nieskończenie często, co daje nieskończony ciąg malejący elementów A.

Załóżmy, że istnieje nieskończony antyłańcuch. Skonstruujemy taki minimalny. Weźmy a_1 o najmniejszej długości która może rozpocząć antyłańcuch. Po tym dajmy a_2 itd. Dostajemy nieskończony antyłańcuch a_1, $a_2, \ldots$ Widać, że wszystkie a_i muszą być niepuste aby to był antyłańcuch. Niech $b_i = a_{i,1}$, tj. pierwszy element a_i. Ponieważ b_i to ciąg elementów wqo A musi mieć jakiś podciąg b_{n_i} który jest ściśle rosnący albo stały.

Niech c_{n_i} będzie równe a_{n_i} oprócz pierwszego elementu.

Przypatrzmy się $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1 - 1}, c_{n_1}, c_{n_2}, \ldots$

To jest ciąg w którym n_1-ty wyraz jest mniejszy niż w naszym minimalnym antyłańcuchu. Zatem mamy trzy przypadki dające sprzeczność:

- $a_i < a_j$ - niemożliwe bo a_i jest antyłańcuchem
- $a_i < c_{n_j}$ - ale wtedy $a_i < a_{n_j}$ z przechodniości
- $c_{n_i} < c_{n_j}$ - dopiszmy z powrotem na początek odpowiednie b_i i dostajemy $a_{n_i} < a_{n_j}$