Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 1

WQO, minory

well–quasi–orderings

Przypomnijmy: porządek częściowy $(X, \leqslant)$ jest WQO, jeśli w każdym nieskończonym ciągu $x_1, x_2, \ldots$ istnieje para indeksów $i < j$, że $x_i \leqslant x_j$.

Zadanie 1. Które z następujących porządków są WQO:

1. $\mathbb{N}^2$ z porządkiem $(a, b) \leqslant (c, d) \Leftrightarrow (a \leqslant c \wedge b \leqslant d)$,
2. $\mathbb{N}^2$ z porządkiem leksykograficznym,
3. słowa nad $\{a, b\}$ z porządkiem leksykograficznym,
4. $\mathbb{N}$ z porządkiem $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy gdy a dzieli b,
5. zbiór odcinków $X = \{[a, b] : \ a < b, \ a, b \in \mathbb{N}\}$, gdzie $[a, b] \leqslant [c, d]$ jeśli $b < c$ lub $a = c$ i $b \leqslant d$.

Zadanie 2. Udowodnij użyte na wykładzie twierdzenie Ramseya: jeśli X jest nieskończonym zbiorem, a $E_1, E_2, \ldots, E_n$ są rodzinami par elementów z X takimi, że każda para $\{x, y\}$, $x, y \in X$, $x \neq y$ należy do dokładnie jednego zbioru E_i, to istnieje przeliczalny zbiór $Y \subseteq X$ oraz indeks $1 \leqslant i \leqslant k$ takie, że każda para $\{x, y\}$, $x, y \in Y$, $x \neq y$ należy do E_i.

Zadanie 3. Dany jest quasi–porządek częściowy $(A, \leqslant)$. Dla zbioru $X \subseteq A$ definiujemy

$$\mathrm{Forb}(X) = \{a \in A : \forall_{x \in X} \neg(x \leqslant a)\}.$$

Pokaż, że $(A, \leqslant)$ jest WQO wtedy i tylko wtedy gdy każdy podzbiór $B \subseteq A$ zamknięty ze względu na branie mniejszych elementów, da się zapisać jako $B = \mathrm{Forb}(X)$ dla pewnego *skończonego* X.

relacja bycia minorem

Krata $k \times k$ to graf o k^2 wierzchołkach, indeksowanych parami (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant k$, gdzie (i, j) jest połączone krawędzią z (i', j') wtedy i tylko wtedy gdy $|i - i'| + |j - j'| = 1$.

Zadanie 4. Czy K_4 jest minorem kraty 1000×1000? A czy K_5?

Zadanie 5. Graf H składa się z cyklu na sześciu wierzchołkach $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$, w którym dodatko poprowadzono trzy krawędzie, łączące naprzeciwległe wierzchołki na cyklu (czyli krawędzie v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6). Graf G to krata 100×100 z dodatkowymi przekątnymi w jedną stronę: formalnie, wierzchołki G są indeksowane parą liczb (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant 100$ i (i, j) oraz (i', j') są połączone krawędzią jeśli $|i - i'| + |j - j'| = 1$ lub $(i - i')(j - j') = 1$. Czy H jest minorem G?

Zadanie 6. Pokaż, że dla każdego grafu planarnego H istnieje takie k, że H jest minorem kraty $k \times k$.

WQO a minory

Zadanie 7. Pokaż, że drzewa nie są WQO ze względu na relację bycia podgrafem.

Zadanie 8. Pokaż, że zbiór wszystkich spójnych grafów prostych nie jest WQO ze względu na relacje ściągania (możemy tylko ściągać wierzchołki wzdłuż krawędzi, nie możemy usuwać krawędzi i wierzchołków).

Zadanie 9. Pokaż, że zbiór wszyskich grafów prostych, uporządkowany przez relację bycia topologicznym minorem, nie jest WQO.

zadania inne

Poniższe dwa zadania może nie mają związku z teorią minorów, ale przydadzą się na kolejnych wykładach.

Zadanie 10. Pokaż, że jeśli drzewo ma co najmniej $r(r-1)$ wierzchołków ($r \geqslant 2$), to ma r liści lub ścieżkę o r wierzchołkach.

Zadanie 11. Niech T będzie drzewem, gdzie każdy wierzchołek ma stopień co najwyżej 3. Niech $X \subseteq V(G)$ i niech $k \geqslant 1$. Wtedy można z T wywalić część krawędzi tak, by każda pozostała spójna składowa miała od k do $2k-1$ wierzchołków z X (poza jedną, która może mieć mniej niż k).

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 2

treewidth, ciernie, splątania

Zadanie 12. Na grafie G mamy złodzieja i k policjantów. Złodziej ma bardzo szybki motorek, a policjanci helikoptery. Pomiędzy turami każda osoba okupuje jakiś wierzchołek grafu. Tura wygląda następująco:

1. pewien podzbiór policjantów wznosi się ze swoich miejsc i deklaruje, gdzie będzie lądować;
2. złodziej się przemieszcza, ale nie może przechodzić przez wierzchołki, w których stoi policjant (taki, który nie podróżuje);
3. policjanci lądują.

Policjanci wygrywają, jeśli jakiś policjant wyląduje w wierzchołku, gdzie jest złodziej. Pokaż, że minimalna liczba policjantów potrzeba do złapania złodzieja to $\mathrm{tw}(G) + 1$.

treewidth i pathwidth różnych grafów

Zadanie 13. Pokaż, że G jest lasem wtedy i tylko wtedy gdy ma treewidth nie większy niż 1.

Zadanie 14. Pokaż dekompozycję drzewową o szerokości 2 cyklu o n wierzchołkach.

Zadanie 15. Ile wynosi treewidth kliki K_n?

Zadanie 16. Graf jest *zewnętrznie planarny*, jeśli jest planarny i można go narysować na płaszczyźnie tak, by wszystkie wierzchołki leżały na zewnętrznej ścianie. Pokaż, że taki graf ma treewidth co najwyżej 2.

Zadanie 17. Pokaż odwrotność lematu z wykładu: jeśli T jest drzewem, i $(V_t)_{t\in T}$ rodziną podzbiorów $V(G)$ taką, że $\bigcup_{t\in T} V_t = V(G)$ oraz dla każdej krawędzi t_1t_2 w T zbiór $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ rozdziela U_1 od U_2, to $(V_t)_{t\in T}$ jest dekompozycją drzewową G.

Zadanie 18. Niech $W \subseteq V(G)$, a $(T, (V_t)_{t\in T})$ niech będzie dekompozycją drzewiastą grafu G. Pokaż, że jeśli nie istnieje $t \in T$ takie, że $W \subseteq V_t$, to istnieją $w_1, w_2 \in W$ i krawędź t_1t_2 w T takie, że $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ oddziela w_1 od w_2.

Zadanie 19. Klasa grafów series–parallel jest zdefiniowana następująco: K_2 jest series–parallel i jeśli G powstaje z G' poprzez dodanie jednej krawędzi równoległej do już istniejącej, lub przez wepchnięcie wierzchołka w krawędź, to jeśli G' jest series–parallel, to G też. Pokaż, że grafy series–parallel mają treewidth co najwyżej 2.

Zadanie 20. Pokaż, że treewidth kraty $k \times k$:

1. wynosi co najwyżej k,
2. wynosi co najmniej $k - 1$,
3. wynosi co najmniej k.

Zadanie 21. W grafie G nie ma ścieżki długości k. Pokaż, że $\mathrm{pw}(G) < k$.

Zadanie 22. Pokaż, że drzewo o n wierzchołkach może mieć pathwidth $\Omega(\log n)$.

zbiory zewnętrznie spójne

Zadanie 23. Pokaż, że dowolny podzbiór kolumny kraty $r \times r$ o co najmniej $2k$ wierzchołkach jest zewnętrznie k–spójny.

Zadanie 24. Pokaż, że jeśli mamy zbiór zewnętrznie $10k$–spójny o $100k$ wierzchołkach, to graf ma treewidth co najmniej k.

grafy przedziałowe i cięciwowe

Graf G jest grafem *cięciowym* (ang. chordal graph), jeśli nie ma podgrafów indukowanych będących cyklami długości większej niż 3. Graf G jest grafem *przedziałowym* (ang. interval graph), jeśli istnieje rodzina otwartych odcinków na prostej $(s_v)_{v \in V(G)}$ taka, że $uv \in E(G)$ wtw $s_u \cap s_v \neq \emptyset$.

Zadanie 25. Pokaż, że G jest cięciwowy wtedy i tylko wtedy gdy ma dekompozycję drzewową $(T, (V_t)_{t \in T})$ taką, że $G[V_t]$ jest kliką dla każdego $t \in T$.

Zadanie 26. Pokaż, że G jest przedziałowy wtedy i tylko wtedy gdy ma dekompozycję ścieżkową $(T, (V_t)_{t \in T})$ (czyli wymagamy, by T było ścieżką) taką, że $G[V_t]$ jest kliką dla każdego $t \in T$.

kilka istotnych i nietrywialnych definicji

Treewidth. Dla grafu G dekompozycją drzewową nazwiemy takie drzewo T i rodzinę zbiorów wierzchołków $(V_t)_{t \in T}$, że:

(T1) $V(G) = \bigcup_{t \in T} V_t$;

(T2) dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ istnieje $t \in T$, że $u, v \in V_t$;

(T3) dla każdego $v \in V(G)$ zbiór $\{t : v \in V_t\}$ jest spójny w T.

Szerokością dekompozycji nazywamy $\max_{t \in T} |V_t| - 1$. Szerokość drzewiasta (treewidth) grafu to najmniejsza możliwa szerokość dekompozycji. Jeśli dodatkowo będziemy wymagać, by T było ścieżką, otrzymamy *dekompozycję ścieżkową* i *szerokość ścieżkową* (ang. pathwidth).

Zbiory zewnętrznie k-spójne. $X \subseteq V(G)$ jest zewnętrznie k–spójny, jeśli $|X| \geqslant k$ i dla każdych rozłącznych $Y, Z \subseteq X$, $|Y| = |Z| \leqslant k$ istnieje $|Y|$ rozłącznych wierzchołkowo ścieżek łączących Y z Z, nie używających wierzchołków i krawędzi $G[X]$ (poza początkiem i końcem).

Wskazówka do zadania 21: Rozważ drzewo przeszukiwania wgłąb (DFSu) grafu G.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 3

twierdzenie o kracie, inne miary szerokości grafu

grafy przedziałowe i cięciwowe

Graf G jest grafem *cięciowym* (ang. chordal graph), jeśli nie ma podgrafów indukowanych będących cyklami długości większej niż 3. Graf G jest grafem *przedziałowym* (ang. interval graph), jeśli istnieje rodzina otwartych odcinków na prostej $(s_v)_{v \in V(G)}$ taka, że $uv \in E(G)$ wtw $s_u \cap s_v \neq \emptyset$.

Zadanie 27. Pokaż, że G jest cięciwowy wtedy i tylko wtedy gdy ma dekompozycję drzewową $(T, (V_t)_{t \in T})$ taką, że $G[V_t]$ jest kliką dla każdego $t \in T$.

Zadanie 28. Pokaż, że G jest przedziałowy wtedy i tylko wtedy gdy ma dekompozycję ścieżkową $(T, (V_t)_{t \in T})$ (czyli wymagamy, by T było ścieżką) taką, że $G[V_t]$ jest kliką dla każdego $t \in T$.

Zadanie 29. Pokaż, że jeśli G ma treewidth co najwyżej k, to

1. G posiada wierzchołek o stopniu co najwyżej k;
2. wierzchołki G można pokolorować na co najwyżej $(k+1)$ różnych kolorów.

zastosowania twierdzenia o kracie

Zadanie 30. Niech G będzie grafem planarnym, a $X \subseteq V(G)$ jego pokryciem wierzchołkowym (tj. takim zbiorem, że $G \setminus X$ nie ma krawędzi). Pokaż, że szerokość drzewiasta G wynosi $\mathcal{O}(\sqrt{|X|})$.

Zadanie 31. Pokaż, że dla każdego planarnego grafu H istnieje stała $t(H)$ taka, że dla każdego grafu G, którego H nie jest minorem, szerokość drzewiasta G wynosi co najwyżej $t(H)$.

Zadanie 32. Zakładając, że twierdzenie Robertsona-Seymoura jest prawdziwe dla grafów o ograniczonej szerokości drzewiastej, wywnioskuj, że ewentualny nieskończony antyłańcuch dla relacji bycia minorem nie może posiadać grafu planarnego.

inne miary szerokości grafu

Zadanie 33. Dla n-wierzchołkowego grafu G i bijekcji (ustawienia) $\pi : V(G) \to \{1, 2, \ldots, n\}$, szerokością π nazwiemy wartość $\max_{uv \in E(G)} |\pi(u) - \pi(v)|$; szerokość (ang. bandwidth) G to minimalna szerokość po wszystkich ustawieniach π. Jak się ma szerokość G do jego szerokości ścieżkowej?

Zadanie 34. Niech L będzie skończonym zbiorem etykiet. Graf G jest L-poetykietowany, jeśli każdy wierzchołek ma etykietę z L. Dozwalamy na następujące operacje na grafach L-poetykietowanych:

1. utworzenie nowego grafu L-poetykietowanego, składającego się z jednego wierzchołka z wybraną etykietą;
2. stworzenie rozłącznej sumy dwóch L-poetykietowanych grafów;
3. dla dwóch etykiet $a, b \in L$, $a \neq b$, dodanie wszystkich krawędzi łączących wierzchołki o etykiecie a z wierzchołkami o etykiecie b;

4. przeetykietowanie wszystkich wierzchołków z etykietą a na etykietę b.

Clique-width grafu G to minimalna liczba etykiet potrzeba by stworzyć G.

1. Jaki jest cliquewidth drzewa?
2. Jaki jest cliquewidth kliki?
3. Jaki jest cliquewidth kraty $k \times k$? (tak na oko)
4. Jak się ma cliquewidth do treewidthu?

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 4

twierdzenie Robertsona-Seymoura, zastosowania algorytmiczne

zastosowania twierdzenia Robertsona-Seymoura

Zadanie 35. Niech G będzie nieskierowanym grafem i rozważmy dowolne jego zanurzenie w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (tj. każdy wierzchołek jest punktem w $\mathbb{R}^3$, a krawędź krzywą gładką łączącą jego końce; krawędzie są parami rozłączne poza końcami). Powiemy, że dwa rozłączne wierzchołkowo cykle C_1 i C_2 są *nierozdzielne*, jeśli dwóch zamkniętych krzywych przez nie wyznaczonych nie da się rozdzielić (przez homomorfizmy). Kolekcja cykli w G jest *zapętlona*, jeśli są one parami rozłączne i nierozdzielne, a *zapętlenie* G to maksymalna moc zapętlonej kolekcji cykli w G. Pokaż, że problem sprawdzania, czy G ma zapętlenie o k cyklach, można rozwiązać w czasie $O(f(k)n^c)$ dla pewnej funkcji f i stałej c.

Zadanie 36. Pokaż że następujący problem można rozwiązać w czasie $O(f(k)n^c)$ dla pewnej funkcji f i stałej c: mając dany jest graf planarny G i liczbę k, sprawdzić, czy można tak narysować G na płaszczyźnie i wybrać co najwyżej k ścian, by każdy wierzchołek grafu leżał na jednej wybranej ścianie?

Zadanie 37. Pokaż że następujący problem można rozwiązać w czasie $O(f(k)n^c)$ dla pewnej funkcji f i stałej c: mając dany jest graf planarny G i liczbę k, sprawdzić, czy można znaleźć taki nadgraf $G' \supset G$, że G' jest planarne i ma średnicę co najwyżek k.

problem rozłącznych ścieżek

Zadanie 38. Podaj przykład planarnej instancji problemu k rozłącznych ścieżek $I = (G, (s_i, t_i)_{i=1}^k)$ o następujących własnościach: $\mathrm{tw}(G) \geqslant 2^{\Omega(k)}$, I ma rozwiązanie i w dodatku dowolne rozwiązanie I wykorzystuje wszystkie wierzchołki G.

algorytmy na dekompozycji drzewiastej

Zadanie 39. Pokaż, że mając danę dekompozycję drzewową o szerokości t da się skonstruować w czasie wielomianowym dekompozycję o tej samej szerokości taką, że T jest ukorzenione, i każdy wierzchołek $t \in T$ jest jednym z czterech typów:

(leaf) $|V_t| = 1$ i t jest liściem T;

(introduce) t ma jednego syna s i $V_t = V_s \cup \{v\}$, $v \notin V_s$;

(forget) t ma jednego syna s i $V_s = V_t \cup \{v\}$, $v \notin V_t$;

(join) t ma dwóch synów s i s' i $V_s = V_{s'} = V_t$.

Zadanie 40. Mając dany graf G o n wierzchołkach i jego dekompozycję drzewiastą szerokości t, pokaż algorytm:

1. szukający najmniejszego pokrycia wierzchołkowego w G w czasie $2^{O(t)}n^{O(1)}$;

2. szukający największego zbioru niezależnego w G w czasie $2^{O(t)}n^{O(1)}$;
3. szukający najmniejszego zbioru dominującego w G w czasie $2^{O(t)}n^{O(1)}$;
4. szukający k–kolorowania w G w czasie $2^{O(t\log k)}n^{O(1)}$;
5. szukający cyklu Hamiltona w G w czasie $2^{O(t\log t)}n^{O(1)}$;
6. szukający najdłuższej ścieżki w G w czasie $2^{O(t\log t)}n^{O(1)}$;
7. szukający minimalnego zbioru wierzchołków X takiego, że $G \setminus X$ nie ma cykli długości 5, w czasie $2^{O(t^2)}n^{O(1)}$;
8. szukający minimalnego zbioru wierzchołków X takiego, że w grafie $G \setminus X$ największy zbiór niezależny jest mniejszy niż w grafie G, w czasie $2^{2^{O(t)}}n^{O(1)}$.

Zadanie 41. Pokaż algorytm, który dla grafu planarnego G o n wierzchołkach i liczby k stwierdzi w czasie $2^{O(\sqrt{k})}n^{O(1)}$ czy w G jest zbiór niezależny wielkości co najmniej k.

Zadanie 42. Pokaż algorytm, który dla grafu planarnego G o n wierzchołkach i liczby k stwierdzi w czasie $2^{O(\sqrt{k}\log k)}n^{O(1)}$ czy w G jest ścieżka długości co najmniej k.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 5

kolorowania, grafy doskonałe, inne klasy grafów

algorytm zachłanny

Przypomnijmy: na wykładzie rozważaliśmy algorytm zachłanny, który brał pewne ustawienie wierzchołków $v_1, v_2, \dots, v_n$ i wierzchołkowi v_i przyporządkowywał najmniejszy możliwy kolor nieużyty przez $N(v_i) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$.

Zadanie 43. Pokaż, że istnieje takie ustawienie wierzchołków, że algorytm zachłanny użyje tylko $\chi(G)$ kolorów.

Zadanie 44. Pokaż graf dwudzielny o $2n$ wierzchołkach i ustawienie jego wierzchołków takie, że algorytm zachłanny użyje n kolorów.

grafy krytycznie k-kolorowalne

Graf G nazwiemy krytycznie k-kolorowalnym, jeśli $\chi(G) = k$ i dla każdego $v \in V(G)$ mamy $\chi(G \setminus v) < k$.

Zadanie 45. Pokaż, że każdy graf G o $\chi(G) = k$ ma podgraf indukowany krytycznie k-kolorowalny.

Zadanie 46. Wyznacz wszystkie krytycznie 3-kolorowalne grafy.

wielomian chromatyczny

Dla grafu G funkcję $P_G(k)$ przyporządkowywującą liczbie $k \geqslant 1$ liczbę kolorowań grafu G na k kolorów nazwiemy wielomianem chromatycznym G.

Zadanie 47. Pokaż, że jest to rzeczywiście wielomian. Pokaż dodatkowo, że ma on stopień $|V(G)|$, przy $x^{|V(G)|}$ ma 1, a przy $x^{|V(G)|-1}$ ma $-|E(G)|$.

grafy doskonałe

Przypomnienie. Graf przedziałowy to taki graf G, że każdemu $v \in V(G)$ można przyporządkować przedział otwarty $I_v \subset \mathbb{R}$ taki, że $uv \in E(G)$ wtedy i tylko wtedy gdy $I_v \cap I_u \neq \emptyset$. Graf G jest grafem *cięciowym* (ang. chordal graph), jeśli nie ma podgrafów indukowanych będących cyklami długości większej niż 3.

Zadanie 48. Pokaż, że następujące klasy grafów są doskonałe:

1. kliki,
2. grafy dwudzielne,
3. grafy przedziałowe,
4. grafy cięciwowe.

Zadanie 49. Pokaż, że cykl i antycykl długości nieparzystej większej od 3 nie jest grafem doskonałym.

Zadanie 50. Pokaż, że własność bycia grafem doskonałym nie jest zamknięta ani na branie podgrafów, ani na branie minorów.

Zadanie 51. Dla danego porządku częściowego $(A, \leqslant)$ grafem porównań G nazwiemy graf taki, że $V(G) = A$ i $xy \in E(G)$ jeśli x i y są różne i porównywalne. Pokaż, że taki graf G jest doskonały.

Zadanie 52. Pokaż, że dopełnienie grafu przedziałowego jest grafem porządku częściowego.

Zadanie 53. Dla grafu G grafem liniowym $L(G)$ nazwiemy graf taki, że $V(L(G)) = E(G)$ i $e_1e_2 \in E(L(G))$ jeśli e_1 i e_2 mają wspólny koniec.

1. Pokaż, że
$$\chi(L(G)) \in \{\omega(L(G)), \omega(L(G)) + 1\}.$$

2. Znajdź wszystkie grafy proste G takie, że graf liniowy $L(G)$ jest doskonały.

kografy

Kografy to minimalna klasa grafów o następującej własności: pojedynczy wierzchołek jest kografem, suma rozłączna dwóch kografów jest kografem, oraz dopełnienie kografu jest kografem.

Zadanie 54. Pokaż, że kografy są grafami doskonałymi.

Zadanie 55. Pokaż graf doskonały, który nie jest kografem.

Zadanie 56. Pokaż, że jeśli graf jest kografem, to nie zawiera podgrafu indukowanego izomorficznego z P_4 (ścieżka na 4 wierzchołkach).

Zadanie 57. Pokaż, że jeśli graf nie zawiera P_4 jako indukowanego podgrafu, to jest kografem.

asteroidal triples

Trójkę wierzchołków $T = \{a, b, c\}$ w grafie G nazwiemy *asteroidal triple* jeśli między każdymi dwoma wierzchołkami z T istnieje ścieżka w G omijająca sąsiedztwo trzeciego wierzchołka. Grafy, które nie mają takich trójek, nazywamy AT-free.

Zadanie 58. Pokaż, że grafy przedziałowe są AT-free.

Zadanie 59. Pokaż przykład grafu cięciowego, który nie jest AT-free.

Zadanie 60. Pokaż przykład grafu AT-free, który nie jest cięciowy.

Zadanie 61. Pokaż, że jeśli graf jest cięciwowy i AT-free to jest przedziałowy.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 6

kolorowania grafów planarnych

choosability

Zadanie 62. Podaj przykład grafu G takiego, że $\mathrm{ch}(G) > \chi(G)$.

Zadanie 63. Dana jest liczba $k > 1$. Podaj przykład grafu dwudzielnego G_k takiego, że $\mathrm{ch}(G_k) \geqslant k$.

wzór Eulera i discharging

Zadanie 64. Pokaż, że w każdym grafie narysowanym na torusie istnieje wierzchołek o stopniu co najwyżej 6.

Zadanie 65. Pokaż, że jeśli możemy narysować graf 6-regularny na torusie, to jest on striangularyzowany po narysowaniu.

Zadanie 66. Korzystając z poprzednich dwóch zadań, spróbuj udowodnić, że grafy, które można narysować na torusie są 6-kolorowalne. Czy zadziałał argument z łańcuchami Kempego?

Zadanie 67. Ania narysowała planarny graf dwudzielny $G = (V \cup W, E)$ taki, że wierzchołki w V mają stopień 5, a wierzchołki w W mają stopień 3. Następnie przyporządkowała numerki wierzchołkom tak, że:

1. każdy wierzchołek w V ma numerek 1, 2 lub 3, a każdy wierzchołek w W ma numerek $4, 5, 6, 7$ lub 8.
2. każdy wierzchołek w V zna wszystkie numerki od 4 do 8, a każdy wierzchołek w W zna wszystkie numerki od 1 do 3.

Pokaż, że Ania gdzieś się pomyliła.

Zadanie 68. *Wagą* krawędzi w grafie planarny nazwiemy sumę stopni końców tej krawędzi. Narysuj graf planarny, w którym każda krawędź ma wagę co najmniej (a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13.

różne dziwne

Zadanie 69. Niech graf G będzie triangulacją. Udowodnij, że jego graf dualny jest 2–kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Zadanie 70. Udowodnij, że triangulacja jest 3–kolorowalna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Zadanie 71. Rozważmy rodzinę prostych na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współpękowe. Rozważmy naturalny graf zadany przez te proste (wierzchołki to punkty przecięcia, krawędzie łączą pary sąsiednich wierzchołków na jednej prostej). Udowodnij, że tak zadany graf planarny jest 3–kolorowalny.

Zadanie 72. Rozstrzygnij, czy następujące konfiguracje są redukowalne:

- Wierzchołek stopnia 4
- Wierzchołek stopnia 5
- Trójkąt złożony z dwóch wierzchołków stopnia 5 i jednego stopnia 4.

Zadanie 73. Niech T będzie minimalną triangulacją nie zawierającą żadnej z redukowalnych konfiguracji, zaś v niech będzie wierzchołkiem stopnia 5 w tej triangulacji. Udowodnij, że po rozładowaniu wedle procedury z wykładu ładunek w v jest niedodatni.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 7

ekspansje i spektralna teoria grafów

Zadanie 74. Niech G będzie grafem d–regularnym. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. G jest niespójny;
2. $\lambda_2(G) = d$;
3. $h^E(G) = 0$.

Zadanie 75. Niech G będzie spójnym grafem d-regularnym. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. G jest dwudzielny;
2. $\lambda_n(G) = -d$;
3. $h^V(G) = 0$.

Zadanie 76. Pokaż, że jeśli G jest n-wierzchołkowym grafem prostym, to $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(G) = 0$.

produkty grafów

Niech G i H będą grafami. *Produkt kartezjański* $G \Box H$ to graf o $V(G \Box H) = V(G) \times V(H)$ oraz $(u, v)(u', v') \in E(G \Box H)$ jeśli $u = u'$ i $vv' \in E(H)$ lub $v = v'$ i $uu' \in E(G)$. *Produkt tensorowy* $G \times H$ to graf o $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ oraz $(u, v)(u', v') \in E(G \times H)$ jeśli $uu' \in E(G)$ i $vv' \in E(H)$. *Kwadrat grafu* G to graf G^2 z $V(G) = V(G^2)$ i krotność krawędzi uv w G^2 to liczba ścieżek $u \to w \to v$ w G.

Zadanie 77. Niech A, B, C będą grafami, przy czym A i B są dwudzielne. Które z następujących grafów muszą być dwudzielne: $A \times B$, $A \times C$, $A \Box B$, $A \Box C$?

Zadanie 78. Czy produkt kartezjański grafów spójnych musi być spójny? Czy produkt tensorowy grafów spójnych musi być spójny?

Zadanie 79. Skonstruuj produkty kartezjański i tensorowy grafów C_4 i $K_{1,3}$ (czyli cyklu o 4 wierzchołkach oraz gwiazdy o jednym środku i trzech liściach).

Zadanie 80. Znajdź wszystkie grafy spójne G, dla których G^2 jest dwudzielny po usunięciu pętli.

Zadanie 81. Udowodnij, że graf G^2 jest niespójny wtedy i tylko wtedy, gdy G jest dwudzielny lub niespójny.

Zadanie 82. Niech G i H będą grafami o wartościach własnych $(\lambda_i)_{i=1}^{n}$ i $(\mu_i)_{i=1}^{n}$. Udowodnij następujące fakty.

1. Jeśli G jest prosty i d-regularny, to wartości własne $\bar{G}$ to $(n - 1 - d)$ oraz $(-1 - \lambda_i)_{i=2}^{n}$.

2. Wartości własne G^2 to $(\lambda_i)_{i=1}^n$.
3. Wartości własne $G \times H$ to $\lambda_i \mu_j$.
4. Wartości własne $G \square H$ to $\lambda_i + \mu_j$.

Zadanie 83. Niech G będzie grafem d-regularnym. Pokaż, że:

1. $G \square G$ jest $2d$-regularny;
2. $d - \lambda_2(G) = 2d - \lambda_2(G \square G)$;
3. $d - \lambda(G) \leqslant 2d - \lambda(G \square G)$;
4. $G \times G$ jest d^2-regularny;
5. $d(d - \lambda(G)) = d^2 - \lambda(G \times G)$.

Zadanie 84. Niech G będzie dowolnym d-regularnym multigrafem. G' tworzymy dodając w każdym wierzchołku pętlę. Udowodnij, że

1. $(d+1) - \lambda_2(G') = d - \lambda_2(G)$;
2. $(d+1) - \lambda(G') = \min(d - \lambda_2(G), d + 2 + \lambda_n(G))$

zadania inne

Zadanie 85. Załóżmy, że G jest prosty i d-regularny, $d \geqslant 3$, i ma wartości własne $(\lambda_i)_{i=1}^n$. Graf liniowy $L(G)$ zdefiniowany jest następująco: $V(L(G)) = E(G)$, a $ef \in E(L(G))$ jeśli e i f mają wspólny koniec w G. Udowodnij, że wartości własne $L(G)$ to $d - 2 + \lambda_i$ oraz dodatkowo -2 z krotnością $|E| - |V|$.

Wskazówka: rozłóż $dI - A(G) = BB^T$, gdzie B jest macierzą $|V(G)| \times |E(G)|$.

Zadanie 86. Oblicz ekspansję wierzchołkową i krawędziową oraz pełne spektrum kliki K_n, cyklu C_n oraz bikliki $K_{n,n}$.

Zadanie 87. Pokaż, że pełne spektrum grafu Petersena to 3, 5×1 oraz 4×-2.

Zadanie 88. Używając poprzedniego zadania pokaż, że K_{10} nie jest sumą rozłączną trzech grafów Petersena.

Zadanie 89. Niech G będzie d-regularnym spójnym multigrafem.

1. Pokaż, że $d - \lambda_2(G) = \Omega(d^{-1}n^{-2})$.
2. Pokaż, że jeśli G ma w każdym wierzchołku pętelkę, to $d - \lambda(G) = \Omega(d^{-1}n^{-2})$.

Zadanie 90. Niech G będzie d–regularnym multigrafem o n wierzchołkach i niech $d - \lambda(G) \geqslant \gamma$ dla pewnej stałej γ. Pokaż, że istnieje stała c zależna tylko od d i γ taka, że średnica grafu G wynosi co najwyżej $c \log |V(G)|$.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 8

ekspansje, spektralna teoria grafów, zygzak

Zadanie 91. Załóżmy, że G jest prosty i d-regularny, $d \geqslant 3$, i ma wartości własne $(\lambda_i)_{i=1}^n$. Graf liniowy $L(G)$ zdefiniowany jest następująco: $V(L(G)) = E(G)$, a $ef \in E(L(G))$ jeśli e i f mają wspólny koniec w G. Udowodnij, że wartości własne $L(G)$ to $d - 2 + \lambda_i$ oraz dodatkowo -2 z krotnością $|E| - |V|$.

Wskazówka: rozłóż $dI - A(G) = BB^T$, gdzie B jest macierzą $|V(G)| \times |E(G)|$.

Zadanie 92. Oblicz ekspansję wierzchołkową i krawędziową oraz pełne spektrum kliki K_n, cyklu C_n oraz bikliki $K_{n,n}$.

Zadanie 93. Niech T_n będzie kratą toryczną $n \times n$, czyli grafem, gdzie $V(T_n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}^2$, i (a, b) jest połączone krawędzią z (c, d) jeśli $a = c$ i $b - d = \pm 1$ lub $b = d$ i $a - c = \pm 1$ (odejmowania wykonywane są modulo n). T_n jest grafem 4–regularnym i np. $(0, 0)$ sąsiaduje z $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, n-1)$ i $(n - 1, 0)$. Załóżmy, że n jest liczbą parzystą. Oblicz ekspansję wierzchołkową, krawędziową oraz wszystkie wartości własne T_n.

Zadanie 94. Pokaż, że pełne spektrum grafu Petersena to 3, 5×1 oraz 4×-2.

Wskazówka: policz spektrum dopełnienia grafu Petersena.

Zadanie 95. Używając poprzedniego zadania pokaż, że K_{10} nie jest sumą rozłączną trzech grafów Petersena.

Zadanie 96. Narysuj $K_5 ⓩ C_4$.

Zadanie 97. Niech G będzie d-regularnym spójnym multigrafem.

1. Pokaż, że $d - \lambda_2(G) = \Omega(d^{-1}n^{-2})$.
2. Pokaż, że jeśli G ma w każdym wierzchołku pętelkę, to $d - \lambda(G) = \Omega(d^{-1}n^{-2})$.

Zadanie 98. Niech G będzie d–regularnym multigrafem o n wierzchołkach i niech $d - \lambda(G) \geqslant \gamma$ dla pewnej stałej γ. Pokaż, że istnieje stała c zależna tylko od d i γ taka, że średnica grafu G wynosi co najwyżej $c \log |V(G)|$.

Zadanie 99. Niech G będzie multigrafem d-regularnym. Niech $\delta < \frac{d-\lambda(G)}{6}$. Niech G' powstaje z G poprzez usunięcie co najwyżej $\delta|V|$ krawędzi. Udowodnij, że G' ma spójną składową o przynajmniej $\left(1 - \frac{2\delta}{d-\lambda(G)}\right)|V|$ wierzchołkach.

Zadanie 100. Dla ustalonych d i n, niech $\mathcal{G}_{d,n}$ będzie rodziną grafów dwudzielnych $G = (V \cup W, E)$ takich, że $|V| = |W| = n$ i każdy wierzchołek w V ma stopień d. Pokaż, że istnieje stała $\alpha = \Omega(1/\mathrm{poly}(d))$ (niezależna od n) taka, że jeśli $G = (V \cup W, E)$ jest losowo wybranym grafem z $\mathcal{G}_{d,n}$, to każdy zbiór $X \subseteq V$ mocy co najwyżej αn ma co najmniej $(d-2)|X|$ sąsiadów.

Zadanie 101. Niech F_q będzie ciałem o charakterystyce q. Rozważmy graf G, którego zbiorem wierzchołków jest F_q^2, a krawędź łączy (a, b) z (c, d) jeśli $ac = b + d$.

1. Udowodnij, że wierzchołek (a, b) jest połączony krawędzią z wszystkimi wierzchołkami (c, d) takimi, że (c, d) leży na prostej $ax - b$.

2. Oblicz macierz sąsiedztwa grafu G^2.

3. Oblicz wartości własne tej macierzy.

4. Udowodnij, że G jest ekspanderem o bezwzględnej przerwie spektralnej co najmniej $q - \sqrt{q}$.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 9

konstrukcje ekspanderów, błądzenia losowe, redukcja losowości

konstrukcje ekspanderów

Zadanie 102. Dla ustalonych d i n, niech $\mathcal{G}_{d,n}$ będzie rodziną grafów dwudzielnych $G = (V \cup W, E)$ takich, że $|V| = |W| = n$ i każdy wierzchołek w V ma stopień d. Pokaż, że istnieje stała $\alpha = \Omega(1/\text{poly}(d))$ (niezależna od n) taka, że jeśli $G = (V \cup W, E)$ jest losowo wybranym grafem z $\mathcal{G}_{d,n}$, to każdy zbiór $X \subseteq V$ mocy co najwyżej αn ma co najmniej $(d-2)|X|$ sąsiadów.

Zadanie 103. Niech F_q będzie ciałem o charakterystyce q. Rozważmy graf G, którego zbiorem wierzchołków jest F_q^2, a krawędź łączy (a,b) z (c,d) jeśli $ac = b + d$.

1. Udowodnij, że wierzchołek (a,b) jest połączony krawędzią z wszystkimi wierzchołkami (c,d) takimi, że (c,d) leży na prostej $ax - b$.
2. Oblicz macierz sąsiedztwa grafu G^2.
3. Oblicz wartości własne tej macierzy.
4. Udowodnij, że G jest ekspanderem o bezwzględnej przerwie spektralnej co najmniej $q - \sqrt{q}$.

błądzenia losowe

Przypominamy: $\|u\|_1 = \sum |u_i|$, zaś $\|u\|_2 = \sqrt{\sum |u_i|^2}$.

Zadanie 104. Udowodnij, że dla dowolnego wektora $u \in \mathbb{C}^n$ zachodzi $\|u\|_2 \leqslant \|u\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|u\|_2$.

Zadanie 105. Niech G będzie d-regularnym multigrafem, i niech $\mathbb{P}$ będzie dowolnym rozkładem prawdopodobieństwa na $V(G)$. Niech X_0 będzie wierzchołkiem G wybranym zgodnie z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}$, oraz niech X_{k+1} będzie losowym sąsiadem wierzchołka X_k (każdego sąsiada wybieramy z równym prawdopodobieństwem, i niezależnie od dotychczasowych wyborów). Udowodnij, że

$$\sum_{v \in V(G)} \left| \mathbb{P}(X_k = v) - \frac{1}{n} \right| \leqslant \sqrt{n} \left(\frac{\lambda(G)}{d} \right)^k \sum_{v \in V(G)} \left| \mathbb{P}(X_0 = v) - \frac{1}{n} \right|.$$

Zadanie 106. Niech $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $(Pu)_i = u_i$ dla $i \leqslant k$ i $(Pu)_i = 0$ dla $i > k$ (czyli P zeruje współrzędne dalsze niż k). Niech G będzie d-regularnym multigrafem o n wierzchołkach, a A jego macierzą sąsiedztwa. Pokaż, że dla dowolnego wektora v o współczynnikach nieujemnych mamy

$$\frac{\|PAPv\|_2}{d} \leqslant \left(\frac{k}{n} + \frac{\lambda(G)}{d} \right) \|v\|_2.$$

Zadanie 107. Niech G będzie d-regularnym multigrafem. Niech $B \subseteq V(G)$. Wybieramy losowy wierzchołek $X_0 \in V(G)$, a następnie wykonujemy t kroków błądzenia losowego. Udowodnij, że prawdopodobieństwo, że $X_i \in B$ dla każdego $i = 0, 1, \ldots, t$ jest nie większe niż

$$\left(\frac{\lambda(G)}{d} + \frac{|B|}{|V(G)|} \right)^t.$$

Zadanie 108. Niech G będzie d-regularnym multigrafem. Niech $B \subseteq V(G)$. Wybieramy losowy wierzchołek $X_0 \in V(G)$, a następnie wykonujemy t kroków błądzenia losowego, otrzymując zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_t$. Niech $K \subseteq \{0, 1, \ldots, t\}$. Udowodnij, że prawdopodobieństwo, że $X_i \in B$ dla każdego $i \in K$ jest nie większe niż

$$\left(\frac{\lambda(G)}{d} + \frac{|B|}{|V(G)|}\right)^{|K|}.$$

redukcje losowości

Algorytmem losowym nazwiemy algorytm A, który na wejściu przyjmuje dane x oraz y, gdzie o y myślimy jako o losowej części danych; x jest podany we względnie dowolny sposób, zaś y to ciąg n bitów. Zakładamy, że istnieje pewna poprawna odpowiedź $C(x) \in \{0, 1\}$.

Mówimy, że A ma błąd jednostronny, jeśli dla x spełniających $C(x) = 0$ zachodzi $A(x, y) = 0$, zaś dla $C(x) = 1$ równość $A(x, y) = 1$ zachodzi dla przynajmniej $\frac{3}{4}2^n$ spośród możliwych y.

Mówimy, że A ma błąd dwustronny, jeśli dla każdego x zbiór tych y, że $C(x) \neq A(x, y)$ ma moc co najwyżej $2^n/4$.

Zadanie 109. Niech A będzie dowolnym algorytmem losowym z błędem jednostronnym. Skonstruujmy ekspander na 2^n wierzchołkach (które utożsamiamy z możliwymi ciągami y), o stopniu d i spełniający $\lambda(G) < d/4$. Niech A' będzie algorytmem losowym, który losuje pierwszy ciąg bitów y_0, następnie bierze jako y_i losowego sąsiada y_{i-1}, i zwraca 0, jeśli $A(x, y_i) = 0$ dla wszystkich y_i, zaś 1, jeśli wśród $A(x, y_i)$ jest przynajmniej jedna jedynka dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Udowodnij, że A' jest algorytmem losowym z błędem jednostronnym popełnianym z prawdopodobieństwem co najwyżej 2^{-k}.

Zadanie 110. Porównaj prawdopodobieństwo sukcesu i liczbę zużytych bitów losowych algorytmu A' z zadania 109 i algorytmu, który k-krotnie powtarza algorytm A dla niezależnie wylosowanych ciągów y.

Zadanie 111. Spróbujmy podobnie jak w zadaniu 109 ograniczyć liczbę bitów losowych przy powtarzaniu algorytmu z dwustronnym błędem. Tym razem robimy błądzenie losowe o $2t$ krokach (czyli mamy $2t+1$ zmiennych $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{2t}$) i wybieramy większościową odpowiedź $(A(x, Y_i))_{0 \leqslant i \leqslant 2t}$. Zanalizuj prawdopodobieństwo porażki takiego eksperymentu.
Wskazówka: być może będzie potrzeba poprawienia sukcesu pojedynczego wywołania algorytmu A, np. podmienienie algorytmu A na trzykrotne wykonanie A na trzech częściach podpowiedzi y.

Zadanie 112. Porównaj prawdopodobieństwo sukcesu i liczbę zużytych bitów losowych algorytmu z zadania 111 i algorytmu, który $(2k+1)$-krotnie powtarza algorytm A dla niezależnie wylosowanych ciągów y i wybiera większościową odpowiedź.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 10

konstrukcje ekspanderów, redukcja losowości

redukcje losowości

Algorytmem losowym nazwiemy algorytm A, który na wejściu przyjmuje dane x oraz y, gdzie o y myślimy jako o losowej części danych; x jest podany we względnie dowolny sposób, zaś y to ciąg n bitów. Zakładamy, że istnieje pewna poprawna odpowiedź $C(x) \in \{0, 1\}$.

Mówimy, że A ma błąd jednostronny, jeśli dla x spełniających $C(x) = 0$ zachodzi $A(x, y) = 0$, zaś dla $C(x) = 1$ równość $A(x, y) = 1$ zachodzi dla przynajmniej $\frac{3}{4}2^n$ spośród możliwych y.

Mówimy, że A ma błąd dwustronny, jeśli dla każdego x zbiór tych y, że $C(x) \neq A(x, y)$ ma moc co najwyżej $2^n/4$.

Przypomnijmy jeszcze zadanie z zeszłego tygodnia, co się nam dziś przyda.

Zadanie 113. Niech G będzie d-regularnym multigrafem. Niech $B \subseteq V(G)$. Wybieramy losowy wierzchołek $X_0 \in V(G)$, a następnie wykonujemy t kroków błądzenia losowego, otrzymując zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_t$. Niech $K \subseteq \{0, 1, \ldots, t\}$. Udowodnij, że prawdopodobieństwo, że $X_i \in B$ dla każdego $i \in K$ jest nie większe niż

$$\left(\frac{\lambda(G)}{d} + \frac{|B|}{|V(G)|}\right)^{|K|-1}.$$

Zadanie 114. Niech A będzie dowolnym algorytmem losowym z błędem jednostronnym. Skonstruujmy ekspander na 2^n wierzchołkach (które utożsamiamy z możliwymi ciągami y), o stopniu d i spełniający $\lambda(G) < d/4$. Niech A' będzie algorytmem losowym, który losuje pierwszy ciąg bitów y_0, następnie bierze jako y_i losowego sąsiada y_{i-1}, i zwraca 0, jeśli $A(x, y_i) = 0$ dla wszystkich y_i, zaś 1, jeśli wśród $A(x, y_i)$ jest przynajmniej jedna jedynka dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Udowodnij, że A' jest algorytmem losowym z błędem jednostronnym popełnianym z prawdopodobieństwem co najwyżej 2^{-k}.

Zadanie 115. Porównaj prawdopodobieństwo sukcesu i liczbę zużytych bitów losowych algorytmu A' z zadania 114 i algorytmu, który k-krotnie powtarza algorytm A dla niezależnie wylosowanych ciągów y.

Zadanie 116. Spróbujmy podobnie jak w zadaniu 114 ograniczyć liczbę bitów losowych przy powtarzaniu algorytmu z dwustronnym błędem. Tym razem robimy błądzenie losowe o $2t$ krokach (czyli mamy $2t+1$ zmiennych $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{2t}$) i wybieramy większościową odpowiedź $(A(x, Y_i))_{0 \leqslant i \leqslant 2t}$. Zanalizuj prawdopodobieństwo porażki takiego eksperymentu.
Wskazówka: być może będzie potrzeba poprawienia sukcesu pojedynczego wywołania algorytmu A, np. podmienienie algorytmu A na trzykrotne wykonanie A na trzech częściach podpowiedzi y.

Zadanie 117. Porównaj prawdopodobieństwo sukcesu i liczbę zużytych bitów losowych algorytmu z zadania 116 i algorytmu, który $(2k+1)$-krotnie powtarza algorytm A dla niezależnie wylosowanych ciągów y i wybiera większościową odpowiedź.

Przypomnijmy, że na wykładzie pokazaliśmy, że dla każdego pierwszego p istnieje graf H_p, który jest: p^2-regularny, ma p^8 wierzchołków i $\lambda(H_p) \leqslant 7p$.

Zadanie 118. Dla $p > 35$ zdefiniujmy $G_1 = H_p^2$, $G_{t+1} := G_t^2 ⓩ H_p$. Pokaż, że graf G_t jest p^4-regularny, ma p^{8t} wierzchołków i $\lambda(G_t) \leqslant \frac{2}{5}p^4$.

Zadanie 119. Pokaż, że istnieją stałe $0 < \lambda < d$ takie, że, dla każdego n, w czasie wielomianowym można skonstruować d-regularny graf G_n o dokładnie n wierzchołkach i $\lambda(G_n) < \lambda$.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 11

test liniowości

Pracujemy w następującej sytuacji. Mamy daną funkcję $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$, jako czarną skrzynkę, czyli możemy wyliczać wartości funkcji w różnych punktach. Chcemy sprawdzić, czy f jest funkcją liniową.

Najprostszy test jest następujący: losujemy dwa punkty $x, y \in \mathbb{Z}_2^n$ i sprawdzamy, czy $f(x) + f(y) = f(x+y)$.

Rozważamy również *ekspanderową* wersję tego testu. Bierzemy zbiór $S \subseteq \mathbb{Z}_2^n$, mocy d, i rozważamy d-regularny multigraf graf G o 2^n wierzchołkach (utożsamiamy $V(G)$ z $\mathbb{Z}_2^n$) i krawędziach zdefiniowanych przez $N_G(x) = \{x + s : s \in S\}$. Załóżmy, że ten multigraf G ma małe $\lambda(G)$. W naszym teście losujemy krawędź $xy \in E(G)$ i sprawdzamy, czy $f(x) + f(y) = f(x+y)$.

Celem dzisiejszych ćwiczeń jest zanalizowanie obu powyższych wariantów testu liniowości.

W większości zadań zakładamy, że funkcja f przechodzi jeden z powyższych testów z prawdopodobieństwem co najmniej $(1-\varepsilon)$ dla pewnego małego ε. W tej sytuacji definiujemy funkcję $\phi : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ następująco: by określić $\phi(x)$, patrzymy na $\{f(x+y) - f(y) : y \in \mathbb{Z}_2^n\}$ i wybieramy większościową odpowiedź.

Zadanie 120. Załóżmy, że funkcja f przechodzi pierwszy test z prawdopodobieństwem co najmniej $(1-\varepsilon)$ dla pewnego małego ε. Weźmy dowolne $a \in \mathbb{Z}_2^n$; naszym celem pokazanie jest, że w definicji $\phi(a)$ ogromna większość wartości $f(a+y) - f(y)$ dla $y \in \mathbb{Z}_2^n$ wynosi $\phi(a)$. Zdefiniujmy więc

$$T = \{y \in \mathbb{Z}_2^n : \phi(a) = f(a+y) - f(y)\}$$

i

$$N = \mathbb{Z}_2^n \setminus T = \{y \in \mathbb{Z}_2^n : \phi(a) \neq f(a+y) - f(y)\}.$$

1. Pokaż, że $|T| \geqslant 2^n/2$.
2. Jak ma się to, czy $y \in T$ do tego, czy $y + a \in T$?
3. Pokaż, że jeśli wylosujemy losowy element $x \in T$ i losowy element $y \in N$, to test $f(x)+f(y) = f(x+y)$ **nie** przechodzi ze znaczącym prawdopodobieństwem. *Wskazówka: pokaż, że jeśli para (x, y) przechodzi test, to $(x+a, y+a)$ **nie** przechodzi testu.*
4. Wywnioskuj, że $\frac{|T|}{2^n} \cdot \frac{|N|}{2^n}$ jest małe, więc $\frac{|N|}{2^n}$ jest małe.

Zadanie 121. Przeprowadź analizę z zadania 120 dla drugiego, ekspanderowego, testu liniowości.

1. Zauważ, że pierwsze dwa punkty nie zależą od wariantu eksperymentu.
2. W trzecim punkcie, rozważmy eksperyment „losujemy krawędź $xy \in E(G)$” i oznaczmy zdarzenia: $A = \{xy \in E(G) : |\{x, y\} \cap T| = 1\}$ i $B = \{xy \in E(G) : f(x) + f(y) \neq f(x+y)\}$.
   (a) Pokaż, że $\mathbb{P}(B|A)$ jest duże.
   (b) Pokaż, że $\mathbb{P}(A)$ jest duże, jeśli $|N|$ jest duże.
3. Bazując na trzecim punkcie, wyprowadź odpowiednią wersję czwartego punktu.

Zadanie 122. Pokaż, że jeśli dla każdego x mamy $\phi(x) = f(x+y) - f(y)$ dla więcej niż $\frac{2}{3} \cdot 2^n$ wartości y, to funkcja ϕ jest liniowa.

Zadanie 123. Załóżmy, że dla pewnego małego δ mamy, że dla każdego x zachodzi $\phi(x) = f(x+y) - f(y)$ dla co najmniej $(1-\delta)2^n$ wartości y. Zdefiniujmy

$$T = \{x \in \mathbb{Z}_2^n : f(x) = \phi(x)\}$$

i

$$N = \mathbb{Z}_2^n \setminus T = \{x \in \mathbb{Z}_2^n : f(x) \neq \phi(x)\}.$$

1. Pokaż, że jeśli $x \in T$ i $y \in N$, to $\phi(x) \neq f(x+y) - f(y)$ lub $\phi(y) \neq f(x+y) - f(x)$.
2. Wywnioskuj, że $\frac{|T|}{2^n} \cdot \frac{|N|}{2^n}$ jest małe, więc i jeden ze zbiorów T lub N jest mały.