Przypomnijmy, że dla macierzy M mówimy, że v jest wektorem własnym M z wartością własną λ, jeśli $Mv = \lambda v$. Wartości własne, przypomnijmy, są pierwiastkami wielomianu $\det(M - \lambda I)$, a zatem jest ich dokładnie n (z krotnościami).

Ale: macierz $M(G)$ jest symetryczna. Przytoczmy twierdzenie z algebry liniowej. Nie będziemy go tu dowodzić (choć nie jest to bardzo trudne).

Twierdzenie 0.1. *Niech M będzie macierzą symetryczną nad $\mathbb{R}$. Wówczas rozkłada się ona nad $\mathbb{R}$ na UDU^{-1}, gdzie U jest ortonormalna ($U^{-1} = U^T$, rzędy U to wektory wzajemnie prostopadłe, o długości 1, czyli wyznaczające bazę ortonormalną), zaś D jest diagonalna.*

W szczególności, z tego twierdzenia wynika, że:

1. Wszystkie wartości właśne $M(G)$ są rzeczywiste i jeśli wartość własna λ pojawia się i razy, to ma i wektorów własnych. Oznaczmy $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \lambda_n$ wartości własne $M(G)$.

2. Mamy bazę ortonormalną wektorów własnych $M(G)$, bo macierz diagonalna tak ma, a U to tylko ortonormalna zamiana bazy. Oznaczmy przez v_i wektor własnym dla λ_i w tej bazie.

3. Pierwsza wartość własna to $\max x^T Ax / x^T x$, druga to to samo maksimum, ale po wektorach prostopadłych do v_1, etc.

4. Z kolei jeśli chcemy szukać wartości własnych maksymalnych co do modułu, to rozpatrujemy $\|Ax\|/\|x\|$, tu znowu możemy schodzić na przestrzenie prostopadłe, lub równoważnie $\max |x^T Ax|/x^T x$.

5. Jeśli $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, to $v^T Av = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2$.

Poniżej zamieszczamy (dla chętnych) szkice dowodów części poniższych faktów, w tym twierdzenia 0.1.

Dowód.

- λ jest wartością własną $M \iff$ istnieje wektor v, że $Mv = \lambda v \iff$ istnieje wektor v, że $(M - \lambda I)v = 0 \iff$ macierz $M - \lambda I$ nie jest pełnego rzędu $\iff \det(M - \lambda I) = 0$.

- Niech v, w będą wektorami własnymi odpowiadającymi wartościom własnym $\lambda \neq \mu$. Wtedy $\lambda \langle v, w\rangle = \langle Av, w\rangle = \left\langle v, A^T w\right\rangle = \langle v, Aw\rangle = \mu \langle v, w\rangle$, skąd (jeśli $\lambda \neq \mu$) dostajemy $\langle v, w\rangle = 0$.

- Wartości własne są rzeczywiste: jakaś wartość własna istnieje (bo zasadnicze twierdzenie algebry), jeśli jest zespolona, to $A(v + iw) = (a + ib)(v + iw)$, gdzie v i w są wektorami rzeczywistymi, i któryś jest niezerowy. Sprzęgam, $A(v - iw) = (a - ib)(v - iw)$. To teraz policzmy $(v - iw)^T A(v + iw) = (a + ib)(v - iW)^T (v + iw) = (a + ib)(|v|^2 + |w|^2)$, ale z drugiej strony $(v - iw)^T A(v + iw) = (A(v - iw))^T (v + iw) = (a - ib)(v - iw)(v + iw) = (a - ib)(|v|^2 + |w|^2)$. Wobec tego $b = 0$.

- Jedyna ciut trudniejsza część jest taka, że w wypadku symetrycznym k–krotnej wartości własnej odpowiada podprzestrzeń wektorów własnych wymiaru k. Ja to umiem zrobić dowodząc, że macierz symetryczna się diagonalizuje ortogonalnie. Dowód leci tak — weźmy dowolną wartość własną λ i jej wektor własny v_1. Uzupełnijmy jakkolwiek v_1 do bazy ortonormalnej (zakładam, że v_1 jest znormalizowany), ustawmy te wektory jako kolumny macierzy V. Wtedy $Ve_1 = v_1$. Wobec tego $V^T AVe_1 = \lambda V^T v_1 = \lambda e_1$, czyli e_1 jest wartością własną $V^T AV$, czyli pierwsza kolumna tej macierzy to $(\lambda, 0, 0, \ldots, 0)$. Co więcej, $(V^T AV)^T = V^T A^T V = V^T AV$, czyli to jest macierz symetryczna. Wobec tego pierwszy wiersz wygląda tak samo, a poza tym mamy podmacierz wymiaru $(n-1) \times (n-1)$. Ta podmacierz jest symetryczna, i diagonalizujemy ją indukcyjnie. I już. Wobec tego mamy diagonalizację ortonormalną. Jako, że zarówno wielomian charakterystyczny, jak i wymiar podprzestrzeni własnej to niezmienniki podobieństwa macierzy, to wystarczy zauważyć, że fakt, którego dowodzimy jest prawdziwy w sposób trywialny dla macierzy diagonalnej.

- Jak mamy bazę ortonormalną wektorów własnych, to wyrażenie $x^T A x$ pisze się jako $\sum \lambda_i a_i^2$, gdzie $x = \sum a_i v_i$, z czego wynika charakteryzacja kolejnych wartości własnych. Druga wynika z tego, że $\|Ax\| = \sqrt{\langle Ax, Ax \rangle} = \sqrt{\sum \lambda_i^2 a_i^2}$ dla wektora normalnego x.

$\square$