AUTOREFERAT ROZPRAWY HABILITACYJNEJ

NUMERYCZNE ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ ELIPTYCZNYCH NA SIATKACH NIEZGODNYCH

LESZEK MARCINKOWSKI[1]

WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI I MECHANIKI
UNIWERSYTET WARSZAWSKI
BANACHA 2, 02-097 WARSZAWA

Lista prac wchodzących w skład rozprawy

[H1] Leszek Marcinkowski. A mortar finite element method for fourth order problems in two dimensions with Lagrange multipliers. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42 (5): 1998–2019, 2005.

[H2] Leszek Marcinkowski. Additive Schwarz Method for mortar discretization of elliptic problems with P1 nonconforming finite element. *BIT*, 45 (2): 375–394, 2005.

[H3] Leszek Marcinkowski. An Additive Schwarz Method for mortar Morley finite element discretizations of 4th order elliptic problem in 2d. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 26: 34–54, 2007.

[H4] Leszek Marcinkowski, Talal Rahman. Neumann-Neumann algorithms for a mortar Crouzeix-Raviart element for 2nd order elliptic problems. *BIT*, 48 (3): 607–626, 2008.

[H5] Leszek Marcinkowski. A Neumann-Neumann algorithm for a mortar finite element discretization of fourth-order elliptic problems in 2d. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 25 (6): 1425–1442, 2009.

Wszystkie czasopisma, w których opublikowano prace składające się na rozprawę, zawarte są w liście filadelfijskiej.

Wprowadzenie

Składające się na niniejszą rozprawę habilitacyjną prace wchodzą w zakres dziedziny badań dotyczącej znajdowania rozwiązań przybliżonych zagadnień brzegowych dla równań eliptycznych drugiego i czwartego rzędu na komputerach równoległych. Pisząc bardziej szczegółowo, prace należą do części tej dziedziny, zwanej Dekompozycją Obszaru (DO) czy Metodami Dekompozycji Obszaru (MDO) równoległego rozwiązywania zagadnień różniczkowych zdyskretyzowanych na siatkach niezgodnych.

Tutaj poprzez niezgodność siatek rozumiemy to, że dyskretyzacja jest zbudowana na lokalnych, niezależnych siatkach w podobszarach, w przeciwieństwie do siatek zgodnych, w

[1] E-mail: L.Marcinkowski@mimuw.edu.pl , www: http://www.mimuw.edu.pl/~lmarcin/

których mamy do czynienia z jedną globalną siatką na całym obszarze. Siatki niezgodne stosuje się m.in przy adaptacyjnym lokalnym zagęszczaniu siatki. Dyskretyzacje rozważane w pracy są skonstruowane przy pomocy Metody Elementu Skończonego (MES), por. [8], w której buduje się przestrzenie dyskretne poprzez narzucenie warunków na obcięcie funkcji dyskretnych na elementach (np. trójkątach) i ustalenie odpowiedniej klasy ciągłości funkcji z tej przestrzeni.

Praca [H1] poświęcona jest zaprojektowaniu i analizie dyskretyzacji dla równań czwartego rzędu zbudowanej na siatkach niezgodnych. Udowodniono warunek inf-sup (Ładyżeńskaja - Babuška - Brezzi) dla sformułowania typu siodłowego dyskretyzacji metody mortarowej dla równań czwartego rzędu ze stałymi niezależnymi od parametrów siatek. Warunek ten jest istotny m.in. dla udowodnienia zbieżności metody. W pracy [H2] zaprojektowano nowy algorytm dekompozycji obszaru dla dyskretyzacji mortarowej równania eliptycznego drugiego rzędu z nieciągłymi współczynnikami na siatkach niezgodnych wykorzystującej lokalnie w podobszarach niezgodny element liniowy typu Crouzeix-Raviarta. Udowodnione oszacowania uwarunkowania nowego zadania są prawie optymalne, tzn. zależą tylko logarytmicznie od ilości niewiadomych w podobszarach oraz nie zależą od liczby podobszarów i od skoków nieciągłości lokalnych współczynników zadania. W pracy [H3] rozwiązano problem opracowania metody dekompozycji obszaru dla dyskretyzacji mortarowej wykorzystującej w podobszarach niezgodny element typu Morleya dla równania czwartego rzędu z nieciągłymi współczynnikami. Algorytm typu strukturalnego bazuje na schemacie addytywnej metody Schwarza i jest w pełni równoległy. W pracy udowodniono prawie optymalne oszacowania zbieżności. Praca [H4] dotyczy rozwiązania problemu konstrukcji w pełni równoległej metody dekompozycji obszaru typu Neumanna-Neumanna dla dyskretyzacji równania drugiego rzędu z nieciągłymi współczynnikami na siatkach niegodnych z elementem typu Crouzeix-Raviarta. Wykazano prawie optymalne oszacowania zbieżności dla tej metody. W pracy [H5] skonstruowano metodę typu Neumanna-Neumanna dla dyskretyzacji zadania czwartego rzędu przy pomocy dyskretyzacji mortarowej z wykorzystaniem w podobszarach zgodnego elementu strukturalnego typu zredukowanego elementu Hsieh-Clough-Tochera. Uzyskano nowe wyniki, tzn. udowodniono prawie optymalne oszacowanie zbieżności.

Szczegółowe omówienie rezultatów prac, które składają się na niniejszą rozprawę, poprzedzimy wstępem krótko omawiającym tematykę badań, której dotyczy rozprawa habilitacyjna.

Metody dekompozycji obszaru

Zazwyczaj dyskretyzacje problemów różniczkowych są budowane na bazie jednej globalnej siatki (triangulacji) obszaru, w którym zadanie różniczkowe jest postawione. Jednak w wielu zastosowaniach istnieje potrzeba budowy dyskretyzacji na siatkach niezależnych w podobszarach lub zastosowania różnych metod dyskretyzacji w danych podobszarach (strukturach) wyjściowego obszaru. Spowodowane jest to fizycznymi i matematycznymi własnościami modelu lub względami równoległej implementacji: za daną część obszaru może odpowiadać jeden dany procesor maszyny wieloprocesorowej - wówczas na przykład adaptacyjne zagęszczanie siatki (czyli budowanie nowej dyskretyzacji) odbywa się lokalnie w procesorach.

Jedną z metod dotyczących konstrukcji aproksymacji równań różniczkowych na siatkach niezgodnych jest metoda mortarowa zaproponowana przez Ch. Bernardi, Y. Madeya i T. Paterę na początku lat dziewięćdziesiątych [3]. Podejście to związane jest z konstrukcją przestrzeni rozwiązań dyskretnych poprzez narzucenie odpowiednich warunków ciągłości całkowych typu

L^2 na wspólnej części brzegu sąsiadujących podobszarów na ślady rozwiązań z tych sąsiednich struktur. Od tego czasu ta część dziedziny Metod Dekompozycji Obszaru stanowi obszar intensywnych badań. Opublikowano co najmniej kilkaset prac na temat metody mortarowej. Monografia B. Wohlmuth [27] zawiera obszerną bibliografię dotyczącą tej metody, zob. także [12], [25].

W wyniku dyskretyzacji zagadnień różniczkowych - na siatkach zgodnych jak i niezgodnych - powstają układy równań algebraicznych o dużej, sięgającej setek tysięcy - czy nawet milionów - liczbie niewiadomych, których rozwiązanie wymaga użycia komputerów równoległych i niestandardowych metod numerycznych. Szybkość zbieżności metod iteracyjnych zależy od uwarunkowania zadania, które w przypadku tych układów równań wzrasta wielomianowo wraz z liczbą niewiadomych. (W przypadku układów równań liniowych z macierzą symetryczną dodatnio określoną za uwarunkowanie przyjmujemy stosunek największej do najmniejszej wartości własnej). Stosowane metody iteracyjnego rozwiązywania oparte są na technice prekonditioningu równoległego, która polega na zastąpieniu wyjściowego zadania nowymi zadaniami - o dużo mniejszym uwarunkowaniu, co w przypadku zadania liniowego jest algebraicznie równoważne przemnożeniu macierzy w wyjściowym problemie przez odpowiednią macierz zwaną 'prekonditionerem'. Mnożenie przez tę macierz - 'prekonditioner' jest wtedy implementowane jako efektywny algorytm równoległy. Mówimy, że stałe uwarunkowania nowego zadania są optymalne lub prawie optymalne jeśli oszacowania stałych nie zależą, albo zależą logarytmicznie od ilości niewiadomych w podobszarach, natomiast nie zależą od lokalnych parametrów dyskretyzacji, ilości podobszarów, czy skoków nieciągłości współczynników wyjściowego równania różniczkowego, które często mogą być dowolnie duże. W kontekście praktycznej konstrukcji 'prekonditionerów' równoległych oszacowania prawie optymalne uważane są za zupełnie wystarczające.

Zastosowanie techniki prekonditioningu dla dowolnego układu w sposób obliczeniowo efektywny jest ogólnie niemożliwe. Udaje się to dla specyficznych układów powstałych z dyskretyzacji równań różniczkowych wykorzystując informację o wyjściowych równaniach różniczkowych.

Jedną z najlepszych technik konstrukcji równoległych prekonditionerów zajmuje się dziedzina badań będąca częścią Analizy Numerycznej - zwana Metodami Dekompozycji Obszaru (MDO) czy Dekompozycją Obszaru. Termin dekompozycja obszaru odnosi się do rozdzielenia wyjściowego zagadnienia różniczkowego na danym obszarze, czy odpowiedniej aproksymacji tego zagadnienia, na kilka związanych ze sobą problemów na mniejszych podobszarach tworzących podział wyjściowego obszaru. W metodach numerycznych dekompozycja ma miejsce przede wszystkim na poziomie dyskretyzacji - kiedy to w podobszarach stosujemy różnego typu metody aproksymacji, oraz na poziome rozwiązywania układów równań algebraicznych (liniowych bądź nieliniowych) otrzymanych w wyniku dyskretyzacji wyjściowego zagadnienia. Wtedy zamiast rozwiązywać układy algebraiczne przy pomocy standardowych metod - co zazwyczaj jest zupełnie nieefektywne - rozwiązujemy odpowiednią sumę niezależnych podproblemów związanych z odpowiednimi podobszarami, tak aby otrzymać szybką zbieżność. Dekompozycja może mieć miejsce również na poziomie zagadnienia różniczkowego - kiedy w różnych obszarach stosujemy różne modele matematyczne opisujące zjawiska fizyczne. W praktycznych zastosowaniach te trzy aspekty mogą być ze sobą połączone.

Mimo, że Metoda Dekompozycji Obszaru jako dziedzina badań bierze swój początek historycznie z pracy H. A. Schwarza z 1869 roku [19] (zajmowali się nią również S. L. Sobolew [21], J. von Neumann [24], i I. Babuška [1] w kontekście teorii równań różniczkowych, czy analizy funkcjonalnej), to dopiero w ciągu kilku ostatnich dekad obserwuje się ich gwałtowny rozwój, którego początkiem była praca P.-L. Lionsa [14] z roku 1988 dotycząca naprzemiennej metody Schwarza. Wyniki z tej pracy zapoczątkowały późniejsze opracowanie teorii abstrakcyjnego schematu Naprzemiennej (Multiplikatywnej) i Addytywnej Metody Schwarza, por. [20], [23].

Addytywna Metoda Schwarza jest w pełni równoległym rozwinięciem Naprzemiennej Metody Schwarza. Abstrakcyjny schemat Addytywnej Metody Schwarza umożliwia konstrukcję i analizę wielu typów metod dekompozycji obszaru poprzez odpowiednie zdefiniowanie dekompozycji przestrzeni dyskretnej na sumę podprzestrzeni i wprowadzenie odpowiednich operatorów rzutów na te podprzestrzenie. Istotną i obszerną klasę Metod Dekompozycji Obszaru stanowią metody typu strukturalnego, tzn. takich, w których najpierw eliminuje się niewiadome w podobszarach, a zadanie redukuje się do znalezienia rozwiązania na szkielecie dekompozycji (tzn. sumie brzegów podobszarów). W obrębie metod typu strukturalnego Dekompozycji Obszaru warto wyróżnić bardzo ważną klasę metod typu Neumanna-Neumanna, por. [20], [23], [13]. Bierze ona swoją nazwę od tego, że lokalne zadania które rozwiązujemy w podobszarach są zadaniami z warunkami brzegowymi typu Neumanna. Kluczową rolę w przypadku konstrukcji Metody Dekompozycji Obszaru odgrywa konstrukcja tzw. 'grubej' podprzestrzeni. Brak 'grubej' przestrzeni w konstrukcji algorytmów opartych na schemacie addytywnej metody Schwarza skutkuje tym, że oszacowania zbieżności silnie zależą od liczby podobszarów. Konstrukcja ta powinna być dość prosta ze względu na praktyczną implementację metody, a równocześnie funkcje z tej podprzestrzeni muszą spełniać odpowiednie oszacowania. 'Gruba' podprzestrzeń pełni ważną rolę w wymianie informacji pomiędzy zadaniami lokalnymi, a jej konstrukcja jest szczególnie ważna w konstrukcji algorytmów opartych na schemacie Addytywnej Metody Schwarza - w szczególności metod typu Neumanna-Neumanna, por. [23], [13]. W kontekście metod strukturalnych wiadomo, że prawie optymalne oszacowania uwarunkowania nie dają się poprawić, por. [6].

Od końca lat osiemdziesiątych Dekompozycja Obszaru stanowi dziedzinę aktywnie prowadzonych badań przez grupy naukowców w licznych ośrodkach badawczych, zob. siedem monografii dotyczących Metod Dekompozycji Obszaru [20], [18], [27], [23], [22], [11], [16], materiały z konferencji dotyczących Dekompozycji Obszaru, które odbywają się cyklicznie co półtora roku od ponad dwudziestu lat, por. np. [12], [25], czy podręczniki, por. np. [5], [17].

Wyniki osiągnięte w rozprawie

Prace składające się na niniejszą rozprawę odnoszą się przede wszystkim do pierwszego aspektu dekompozycji obszaru; czyli rozwiązywania układów równań, por. [H2] , [H3], [H4], [H5], jak i - w mniejszym stopniu - do drugiego aspektu, czyli konstrukcji i analizy dyskretyzacji na siatkach niezgodnych, por. [H1] .

Dyskretyzacja mortarowa dla równań czwartego rzędu

W pracy [H1] zaprojektowano i przeanalizowano dyskretyzację metodą mortarową modelowego problemu czwartego rzędu w sformułowaniu typu punktu siodłowego dla podziału na wiele podobszarów.

Dla eliptycznych równań czwartego rzędu nie było tego typu rezultatów przed pracą [H1].

Nasze rezultaty są uogólnieniem wyników dla równań drugiego rzędu otrzymanych w pracach: F. Ben Belgacema [2], D. Brässa, W. Dahmena, i Ch. Wienersa [4], oraz B. Wolhmuth [26], [27].

Jak wyżej wspominaliśmy, w dyskretyzacjach typu mortarowego narzuca się pewne warunki typu L^2 na ślady funkcji z przestrzeni dyskretnej na wspólne części brzegów sąsiednich podobszarów. Te warunki są równoważne równości rzutów ortogonalnych na pewne specjalne przestrzenie testowe zdefiniowane na tych częściach brzegu. Jednym z rezultatów otrzymanych w [H1] jest zaproponowanie nowych i mniej skomplikowanych przestrzeni testowych w stosunku do standardowych przestrzeni, co istotnie obniżą koszt implementacji przy zachowaniu optymalnej szybkości zbieżności metody, por. np. [10], [15].

Drugim ważnym i nowym rezultatem otrzymanym w pracy [H1] jest dowód, że dla sformułowania zadania dyskretnego typu punktu siodłowego przy pomocy metody mortarowej zachodzi warunek Ładyżeńskaja - Babuška - Brezzi (LBB). Warunek ten jest konieczny dla tego, aby istniało jednoznaczne rozwiązanie tego zadania i niezbędny przy dowodach zbieżności metody. Warunek ten, zwany też czasami warunkiem inf-sup, zob. [7], spełniony jest ze stałymi niezależnymi od parametrów dyskretyzacji. Stałe te są niezależne także od liczby podobszarów, co jest bardzo ważne.

Rezultaty te udowodniono dla dwóch typów norm: dualnych norm śladowych, które występują naturalnie w sformułowaniu warunku LBB dla wyjściowego sformułowania zagadnienia różniczkowego, jak i dla norm zależnych od parametrów dyskretyzacji. Wymienione rezultaty umożliwiają zastosowanie wielu znanych metod rozwiązywania układów równań powstałych z dyskretyzacji zagadnień typu siodłowego - jak na przykład niektóre metody rozwiązywania zadania Stokesa. We wszystkich tych metodach koniecznym warunkiem jest to, aby zachodził warunek LBB ze stałymi niezależnymi od dyskretyzacji. Otrzymaliśmy też dodatkowo oszacowanie na błąd aproksymacji mnożnika Lagrange'a w obu typach norm dualnych.

Praca ta wymagała udowodnienia szeregu nowych pomocniczych faktów z zakresu analizy funcjonalnej przestrzeni funkcji dyskretnych.

Metody dekompozycji obszaru dla mortarowej dyskretyzacji typu Crouzeix-Raviarta problemów drugiego rzędu

W pracach [H2] i [H4] zaprojektowano dwa algorytmy dekompozycji obszaru dla dyskretyzacji mortarowej zagadnienia eliptycznego drugiego rzędu z nieciągłymi współczynnikami na siatkach niezgodnych, wykorzystującej lokalnie w podobszarach niezgodny element liniowy typu Crouzeix-Raviarta, por. np. [8]. Algorytmy z [H2] i [H4] są istotnie różnego typu choć zbudowane są z wykorzystaniem abstrakcyjnego schematu Addytywnej Metody Schwarza (AMS) ale z wykorzystaniem zupełnie różnych dekompozycji dyskretnej przestrzeni. W przypadku elementu typu Crouzeix-Raviarta konstrukcja i implementacja algorytmów Metod Dekompozycji Obszaru jest prostsza, m.in. nie ma problemów z tzw. punktami krzyżowymi (crosspoints), ale ponieważ jest to element niezgodny (lokalne przestrzenie elementu skończonego zawierają funkcje nieciągłe), więc dowody odpowiednich oszacowań są dużo trudniejsze. Z kolei duże skoki współczynników zadania wyjściowego powodują brak regularności rozwiązania wyjściowego problemu różniczkowego, co istotnie utrudnia konstrukcję i analizę zbieżności algorytmów znajdowania rozwiązywania problemu dyskretnego.

Udowodnione w obu pracach oszacowania uwarunkowania nowego zadania są prawie optymalne, tzn. oszacowanie stałych zależy jak kwadrat logarytmu od liczby niewiadomych w podobszarze - czyli oszacowania uwarunkowania bardzo słabo zależą od liczby podobszarów i lokalnych parametrów dyskretyzacji, natomiast nie zależą od skoków nieciągłości współczynników wyjściowego problemu brzegowego, które mogą być dowolnie duże. Od wskaźnika uwarunkowania zadania zależy szybkość zbieżności metod iteracyjnych zastosowanych do znalezienia rozwiązania. W kontekście metod strukturalnych wiadomo, że są to oszacowania optymalne, których nie można poprawić nawet dla dyskretyzacji na jednej globalnej siatce, por. [6].

W pracy [H2] skonstruowano i poddano analizie pierwszy algorytm dekompozycji obszaru dla zagadnienia z nieciągłymi współczynnikami zdyskretyzowanego na niezgodnych siatkach w podobszarach z wykorzystaniem elementu typu Crouzeix-Raviarta. Wcześniejsze prace dotyczyły tylko zagadnienia z ciągłymi współczynnikami, którego analiza jest dużo prostsza. Metoda zaproponowana w pracy jest zbudowana na ogólnym schemacie Metody Schwarza i jest typu strukturalnego.

Wyniki otrzymane w [H4] (wspólna praca z dr Talalem Rahmanem z Uniwersytetu w Bergen) to konstrukcja i analiza dwóch addytywnych wersji metody typu Neumanna-Neumanna: jednej - typu strukturalnego, i drugiej będącej modyfikacją pierwszej metody. Konstrukcja w pełni addytywnej wersji metody dekompozycji obszaru typu Neumanna-Neumanna dla problemów eliptycznych drugiego rzędu zdyskretyzowanych metodą mortarową była dość długo otwartym problemem, który został rozwiązany w 2005 roku w [9] dla lokalnych standardowych elementów. Obie wersje algorytmu z pracy [H4] są w pełni równoległe i są rozszerzeniem wyników z [9] na przypadek dyskretyzacji mortarowej z elementami typu Crouzeix-Raviarta.

Metoda Dekompozycji Obszaru dla mortarowej dyskretyzacji równań czwartego rzędu na siatkach niezgodnych

Metoda typu Schwarza dla dyskretyzacji lokalnie niezgodnej typu Morleya

W pracy [H3] przedstawiono Metodę Dekompozycji Obszaru dla dyskretyzacji mortarowej wykorzystującej lokalnie w podobszarach niezgodny element typu Morleya, por. np. [8], dla modelowego zadania czwartego rzędu z nieciągłymi współczynnikami. Element typu Morleya jest najczęściej stosowanym elementem w praktycznych zastosowaniach fizycznych czy technicznych, w których występują równania różniczkowe czwartego rzędu.

Algorytm bazuje na schemacie addytywnej metody Schwarza i jest w pełni równoległy. Udowodniono prawie optymalne oszacowania zbieżności zależne tylko od ilości stopni swobody w podobszarach, a niezależne od parametrów lokalnych siatek w podobszarach oraz od liczby podobszarów i skoków nieciągłości lokalnych współczynników zadania.

Przed pracą [H3] nie były znane żadne algorytmy dekompozycji obszaru dla dyskretyzacji mortarowej typu Morleya i żadne dla dyskretyzacji mortarowej dla równań czwartego rzędu z nieciągłymi współczynnikami, nawet przy użyciu lokalnie zgodnych elementów - na przykład elementu typu Hsieh-Clough-Tochera, zob. np. [8].

Element skończony typu Morleya dla równań czwartego rzędu jest elementem niezgodnym, i to w dużym stopniu, tzn. lokalne podprzestrzenie zawierają funkcje nieciągłe. W konsekwencji mamy stosunkowo mało stopni swobody (małą liczbę niewiadomych) przy tej dyskretyzacji. Równocześnie analiza algorytmu jest dużo bardziej skomplikowana z uwagi na duży stopień niezgodności tego typu elementu skończonego. W dowodach należy używać skomplikowanego aparatu matematycznego związanego z tym rodzajem niezgodnej dyskretyzacji.

Warto dodać, że dowody twierdzeń w tej pracy są bardzo złożone i wymagały wprowadzenia szeregu specjalnych operatorów dyskretnych na wspólnych częściach brzegu dwóch sąsiadujących podstruktur oraz udowodnienia ich stabilności w odpowiednich normach śladowych na brzegach podstruktur.

Metoda Neumanna-Neumanna dla lokalnie zgodnej dyskretyzacji mortarowej równań czwartego rzędu

Praca [H5] dotyczy konstrukcji metody typu Neumanna-Neumanna dla dyskretyzacji równań czwartego rzędu z nieciągłymi współczynnikami przy pomocy dyskretyzacji mortarowej z wykorzystaniem lokalnie w podobszarach zgodnego elementu typu zredukowany Hsieh-Clough-Tochera, zob. [8]. Konstrukcja metody typu Neumanna - Neumanna dla mortarowej dyskretyzacji równania czwartego rzędu, nawet z ciągłymi współczynnikami, była przez dłuższy czas nierozwiązanym problemem.

Konstrukcja i analiza algorytmu są rozszerzeniem rezultatów z prac: [9] i [H4] na przypadek zadania czwartego rzędu.

Element typu zredukowany Hsieh-Clough-Tochera jest tzw. elementem strukturalnym, bardziej skomplikowanym na każdym trójkącie, ale za to mający mniejszą liczbę stopni swobody niż metoda elementu skończonego, w której funkcje obcięte do trójkąta są wielomianami (na przykład element typu trójkąt Argyrisa, por. [8]).

W pracy skonstruowano algorytm typu Neumanna-Neumanna oraz udowodniono prawie optymalne oszacowanie zbieżności zależne logarytmicznie od liczby niewiadomych w podobszarze, a niezależne od skoków parametrów wyjściowego zadania, co w kontekście metod typu Neumanna-Neumanna jest wynikiem nie dającym się poprawić, por. [6]. Kluczowym problemem do rozwiązania było pytanie: jak skonstruować tzw. 'grubą' podprzestrzeń, tzn. specjalną podprzestrzeń przestrzeni dyskretnej o możliwie małym wymiarze, niezbędną w konstrukcji Metod Dekompozycji Obszaru - co w przypadku tej dyskretyzacji było nieoczywiste.

Podsumowanie

W pracach składających się na rozprawę habilitacyjną opracowano szereg w pełni równoległych Metod Dekompozycji Obszaru rozwiązywania układów równań powstałych z dyskretyzacji równań eliptycznych drugiego i czwartego rzędu na siatkach niezgodnych przy pomocy metody mortarowej oraz udowodniono prawie optymalne oszacowania uwarunkowania dla tych metod. Przez prawie optymalność rozumiemy to, że oszacowania uwarunkowania zależą co najwyżej logarytmicznie od liczby niewiadomych w podobszarach, a nie zależą od liczby podobszarów, skoków współczynników wyjściowego zadania czy globalnej liczby niewiadomych we wszystkich podobszarach. W kontekście metod strukturalnych wiadomo, że oszacowania prawie optymalne uwarunkowania nie dają się poprawić. Uzyskano też wyniki dotyczące dyskretyzacji mortarowej zagadnień eliptycznych czwartego rzędu. W szczególności udowodniono warunek inf-sup (Ładyżeńskaja - Babuška - Brezzi) dla sformułowania typu siodłowego dyskretyzacji metody mortarowej dla równań czwartego rzędu ze stałymi niezależnymi od parametrów dyskretyzacji czy liczby podobszarów. Warunek ten jest istotny m.in. dla udowodnienia zbieżności dyskretyzacji, czy możliwości zastosowania znanych ogólnych algorytmów do rozwiązywania zdyskretyzowanego zadania. Wszystkie wyniki otrzymane w pracach składających się na rozprawę habilitacyjną są nowe.

Literatura

[1] Ivo Babuška. Über Schwarzsche Algorithmen in partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. *Czechoslovak Math. J.*, 8 (83):328–343, 1958.

[2] Faker Ben Belgacem. The mortar finite element method with Lagrange multipliers. *Numer. Math.*, 84(2):173–197, 1999. Opublikowano jako raport techniczny wcześniej w 1994.

[3] Christine Bernardi, Yvon Maday, i Anthony T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method. W *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XI (Paris, 1989–1991)*, tom 299, *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, strony 13–51. Longman Sci. Tech., Harlow, 1994.

[4] Dietrich Braess, Wolfgang Dahmen, i Christian Wieners. A multigrid algorithm for the mortar finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(1):48–69, 1999.

[5] Susanne C. Brenner i L. Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, tom 15, *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, trzecie wydanie, 2008.

[6] Susanne C. Brenner i Li-Yeng Sung. Lower bounds for nonoverlapping domain decomposition preconditioners in two dimensions. *Math. Comp.*, 69(232):1319–1339, 2000.

[7] Franco Brezzi i Michel Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] P. G. Ciarlet. Basic error estimates for elliptic problems. W *Handbook of Numerical Analysis, Vol. II*, strony 17–351. North-Holland, Amsterdam, 1991.

[9] Maksymilian Dryja. A Neumann-Neumann algorithm for a mortar discetization of elliptic problems with discontinuous coefficients. *Numer. Math.*, 99:645–656, 2005.

[10] Jianguo Huang, Likang Li, i Jinru Chen. On mortar-type Morley element method for plate bending problem. *Appl. Numer. Math.*, 37(4):519–533, 2001.

[11] John E. Lagnese i Günter Leugering. *Domain decomposition methods in optimal control of partial differential equations*, tom 148, *International Series of Numerical Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[12] Ulrich Langer, Marco Discacciati, David E. Keyes, Olof B. Widlund, i Walter Zulehner, edytorzy. *Domain decomposition methods in science and engineering XVII*, tom 60, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Wybrane prace z 17tej Międzynarodowej Konferencji z Dekompozycji Obszaru (DD17), Strobl, 3–7 lipca 2006.

[13] Patrick Le Tallec. Domain decomposition methods in computational mechanics. *Comput. Mech. Adv.*, 1(2):121–220, 1994.

[14] Pierre-Louis Lions. On the Schwarz alternating method. I. W *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Paris, 1987)*, strony 1–42. SIAM, Philadelphia, PA, 1988.

[15] Leszek Marcinkowski. A mortar element method for some discretizations of a plate problem. *Numer. Math.*, 93(2):361–386, 2002.

[16] Tarek P. A. Mathew. *Domain decomposition methods for the numerical solution of partial differential equations*, tom 61, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[17] Alfio Quarteroni i Alberto Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[18] Alfio Quarteroni i Alberto Valli. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Oxford Science Publications, Oxford, 1999.

[19] Hermann A. Schwarz. *Gesammelte Mathematisches Abhandlungen. Vol. II.* Springer-Verlag, Berlin, 1890.

[20] Barry F. Smith, Petter E. Bjørstad, i William D. Gropp. *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[21] Serguei L. Sobolev. L'Algorithme de Schwarz dans la Theórie de l'Elasticité. *Comptes Rendus (Dokłady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, IV((XIII)6):243–246, 1936.

[22] Olaf Steinbach. *Stability Estimates for Hybrid Coupled Domain Decomposition Methods*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.

[23] Andrea Toselli i Olof Widlund. *Domain decomposition methods—algorithms and theory*, tom 34, *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[24] John von Neumann. *Functional Operators. II. The Geometry of Orthogonal Spaces*. Annals of Mathematics Studies, nr. 22. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1950.

[25] Olof B. Widlund i David E. Keyes, edytorzy. *Domain decomposition methods in science and engineering XVI*, tom 55, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer, Berlin, 2007. Prace z 17-tej Międzynarodowej Konferencji z Dekompozycji Obszaru w Nowym Jorku, 11–15 stycznia 2005.

[26] Barbara I. Wohlmuth. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(3):989–1012, 2000.

[27] Barbara I. Wohlmuth. *Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition*, tom 17, *Lectures Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.