Numeryczna Algebra Liniowa 00/01 - zadanie komputerowe

Zaimplementowac, ewentualnie wykorzystujac jakis pakiet np. Matlab, iteracyjne metody rozwiazywania ukladow rownan liniowych. Do wyboru sa 4 mozliwosci:

- Metody Jacobiego i Gaussa Seidla
- Metoda Gaussa Seidla i SOR
- Metody Richardsona i Czebyszewa trzy poziomowa
- Metody Richardsona i CG (sprzezonych gradientow)

Najwazniejsza czescia tego projektu bedzie testowanie tych metod w zaleznosci od parametru (jesli jest) i roznych macierzy testowych. Tzn dla roznych macierzy testowych o roznym wymiarze testowac ilosc iteracji po ktorych metoda sie zatrzyma.

Warunki stopu: Dla ukladu

$$A\mathbf{u}^* = \mathbf{b}$$

blad residualny $\|A\mathbf{u}^n - A\mathbf{u}^*\|_2 \leq 10^{-6}\|A\mathbf{u}^0 - A\mathbf{u}^*\|_2$ lub ilosc iteracji n przekroczy N_{max} np $N_{max} = 1000$.

Drukowac ilosc iteracji i bledy residualne i dla zadanych rozwiazan bledy prawdziwe wzgledne w normach $\|\cdot\|_p, p = 1, 2, \infty$. tzn. bledy residualne:

$$\|A\mathbf{u}^n - A\mathbf{u}^*\|_p / \|A\mathbf{u}^*\|_p$$

i bledy wlasciwe (dla danego $\mathbf{u}^*$ prawa strone otrzymujemy przez przemnozenie przez macierz tzn $\mathbf{b} = A\mathbf{u}^*$)

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^*\|_p / \|\mathbf{u}^*\|_p$$

Mozna tez dla znanego rozwiazania liczyc:

$$\frac{\|A\mathbf{u}^n - A\mathbf{u}^*\|_p}{\|A\|_s \|\mathbf{u}^*\|_p} \; dla \; \|A\|_s = \begin{cases} \|A\|_F & p = 2 \\ \|A\|_p & p = 1, \infty. \end{cases}$$

Macierze do testowania:

- Macierz (przeskalowana przez h^2) aproksymacji jednowymiarowej rownania $-u'' = f, u(0) = 0, u(1) = 0$: $-h^2\partial\overline{\partial}$ tzn $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}$ dla

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & |i-j| = 1 \\ 0 & |i-j| > 1 \end{cases}$$

  Badac ilosc iteracji w zaleznosci od $N \to +\infty$, np. $N = 10^k, k = 1, 2, 3, 4$. (Nie zapisywac macierzy jako tablicy! Wystarczy w tych metodach umiec mnozyc przez macierz.) Mozna sprawdzic zaleznosc ilosci iteracji od tego czy znane rozwiazanie jest losowym wektorem czy np odpowiadajacym sin czyli $u^*_j = \sin(2\Pi j/(N+1))$ dla $j = 1, \ldots, N$. Przypominamy ze ta macierz aproksymuje rozwiazanie rownania rozniczkowego, wiec rozwiazanie jest przyblizeniem funkcji.

- Kolejna macierz $\mathrm{cond}_2(A_\lambda) = \lambda^2$

$$A_\lambda = Q \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} Q^T$$

  dla Q ortogonalnej tzn $QQ^T = Q^TQ = I$ i $\lambda > 0$. (Za Q mozna wziasc np przekszta lcenie Housholdera $H = I - \frac{2}{\|\mathbf{w}\|_2^2}\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ dla wektora $\mathbf{w} \neq 0$. Badac ilosc iteracji i bledy w zaleznosci od λ, np. $\lambda = 2, 10, 100, 1000, 10^4, 10^5, 10^6$.