Projekt komputerowy na zaliczenie w terminie wstępnym, Wstęp do Informatyki - semestr zimowy

Termin: ostatni lab tzn pierwszy/drugi tydzień stycznia

Napisać program który implementuje procedurę rozkładu macierzy A na $PA = LU$ wymiaru $n \times n$ metodą eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego (L - macierz dolnotrójkątna, U- górnotrójkątna, P- macierz permutacji - czyli inaczej PA macierz o spermutowanych wierszach macierzy A) i zastosować ten rozklad do rozwiązywnia układów równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Testowac program jak opisano poniżej.

W programie wprowadzić następujące opcje na wczytywanie danych:

- podawanie elementów macierzy/wektora prawej strony(ps) z klawiatury
- wczytywanie macierzy/wektor ps z pliku tekstowego o określonym formacie, np. dla macierzy pierwsza linia - liczba naturalna n- wymiar macierzy kolejnych n linii zawierających po n liczb zmiennoprzecinkowych, w razie mniejszej/większej ilości tych liczb program ma zakładać że brakujące są zerami albo ignorować kolejne nadmiarowe liczby, analogicznie dla wektora prawej strony
- macierz/wektor ps generowane przez wzór w szczególności dla tzw macierzy Hilberta: $a[i,j] = 1/(1+i+j);\ i,j = 1,\ldots,n$ - wzór może być podany w programie, nie jest koniecznie aby była możliwość wprowadzenia wzoru z klawiatury interaktywnie.
- elementy macierzy/wektora ps są losowane np. na diagonali n+1 poza elementy o module mniejszym od jeden.

Po rozkładzie macierzy możliwe powinno być wykorzystywanie rozkładu dla rozwiązywanie układu równań liniowych dla różnych wektorów prawej strony $\mathbf{b}$ bez ponownego wykonywania rozkładu.

Powinna być też opcja włączania/wyłączania częściowego wyboru elementu głownego (c.w.e.g) (wtedy dla pewnych macierzy program może przestać działać mimo że działał z c.w.e.g.)

Po rozwiązaniu układu drukować błąd względny i residualny w normie 2, tzn.

1. $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2/\|\mathbf{x}\|_2$
2. $\|A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_1/\|A\|_F\|\mathbf{x}\|_2$

gdzie $\mathbf{x} = (x[1], \ldots, x[n])^T$ rozwiązanie (znane) dokładne, $\tilde{\mathbf{x}}$ rozwiązanie przybliżone otrzymane po obliczeniach algorytmem,

$$\|\mathbf{y}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y[i]|^2}; \ \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a[i,j]|^2}(\text{norma Frobeniusa macierzy} A).$$

Wypisywanie rozwiązania uzyskanego algorytmem $\tilde{\mathbf{x}}$ na ekranie pozostawić jako opcję, tzn po rozwiązaniu układu drukować tylko błedy a użytkownik może np wciskając odpowiedni klawisz i/lub klikając gdzieś myszką rozwiązanie zobaczyć, to samo po wprowadzeniu macierzy i wektora prawej strony.

Testować dla losowych rozwiązań i różnych macierzy nieosobliwych tj rozwiązanie znane $\mathbf{x}$ można uzyskać losowaniem a następnie prawą stronę dostaniemy mnożąc przez macierz A tzn $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$.

Powyższy algorytm rozkładu będzie omówiony teoretycznie na algebrze liniowej wkrótce. Ponieważ jest to projekt na zalicznie w terminie wstępnym więc w jego skład wchodzi też dokładne zapoznanie się z powyższym algorytmem - wystarczy aspekt algorytmiczny tzn jak działa algorytm bez znajomości uzasadnienia czy i dlaczego działa, dla jakich macierzy itd. okaże się, że algorytm ten nie jest za skomplikowany - trzy pętle + ewentualna zamiana wierszy macierzy. Większa część pracy będzie związana z zaprogramowaniem opcji na wczytywanie macierzy, drukowanie błędów itp

Ten algorytm zwany też algorytmem eliminacji Gaussa z c.w.e.g. omówiony jest w każdej książce o metodach numerycznych czy do algebry liniowej (wtedy pominięty jest zazwyczaj aspekt wyboru elementu głównego i w ogóle praktyczna strona implementacji). Ewentualnie slużę informacją lub objaśnieniem jakby ktoś miał kłopoty ze zrozumieniem lub znalezieniem opisu algorytmu.

Ocena będzie zależała od uwzględnienia wszystkich zaleceń i ogólnej funkcjonalności/sensowności programu (oczywiscie bez przesady - wystarczy np wybieranie opcji może być podawaniem cyfr z klawiatury i wciśnięciem Enter). jeśli chodzi o sensowność to np. nie ma sensu trzymać całej macierzy permutacji P, która jest złożeniem (iloczynem) transpozycji (zamiany indeksów) wystarczy zapamiętać kolejne transpozycje w formie pary odpowiednich indeksów, jak ktoś napisze program w taki sposób że trzyma całą macierz P $n \times n$ w pamięci i potem przez nią mnoży wektory standardowo to oczywiście to nie wpłynie na podwyższenie ilości pktów za projekt, trzeba się posłużyć zdrowym rozsądkiem.

Ważne: Termin zaliczenia nieprzekraczalny!!!