Seria zadań domowych nr 1. Równania nieliniowe

Zadania oznaczone jako trudne nie pojawią się na kartkówce. (choć wcale nie muszą być tak naprawdę trudne...)

Zadanie 1 Dla równania $\frac{1}{x+2} - 200 + 0.5x = 0$

(a) pokaż że istnieje rozwiązanie $x^* \in [0, 1000]$

(b) czy metoda bisekcji startująca z odcinka $[0, 1000]$ będzie zbieżna? Jeśli tak to określ n dla których x_n n-ta iteracja spełnia $|x_n - x^*| \leq 10^{-1}$.

(c) określ czy rozwiązanie jest jednoznaczne na $[0, 1000]$

(d) zaproponuj metodę iteracji prostych zbieżną dla dowolnego x_0 z $[0, 1000]$.

(e) oszacuj błąd dla 20-tej iteracji tej metody dla $x_0 = 400$ tzn oszacuj $|x_{20} - x^*|$.

Zadanie 2 Dla równania $\frac{1}{x^2+2} - 10 + 3 * x = 0$ określ czy metoda bisekcji startująca z odcinka $[0, 10]$ będzie zbieżna? Jeśli tak to określ n dla których x_n n-ta iteracja metody bisekcji (środek n-tego odcinka) spełnia $|x_n - x^*| \leq 10^{-1}$.

Zadanie 3 Czy metoda Newtona zastosowana do równania $\frac{1}{x+2} - 200 + 0.5x = 0$ będzie zbieżna lokalnie kwadratowo dla rozwiązania tego równania na $[0, 1000]$? Czy metoda Newtona zastosowana do tego równania z $y_0 = 400$ będzie zbieżna? jeśli tak to oszacuj błąd $|y_4 - x^*|$ dla y_k k-tej iteracji metody Newtona z $y_0 = 400$.

Zadanie 4 Pokaż, że równanie

$$x^* - 0.7 * \sin(x^*) = -23$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie i że następująca metoda iteracyjna

$$x_n = 0.7 * \sin(x_{n-1}) - 23$$

zbiegnie dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ do rozwiązania tego równania.

Oszacuj możliwie dokładnie błąd $|x_9 - x^*|$ dla $x_0 = -23$.

Zadanie 5 Dla równania

$$f(x) = 5 - \exp(x^*) = 0.$$

Pokaż, że

- Istnieje dokładnie jedno rozwiązanie x^* tego równania.
- udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ metoda Newtona zbiegnie do x^*.

- określ czy zachodzi lokalna zbieżność kwadratowa tzn czy istnieje otoczenie x^* takie, że dla x_0 z tego otoczenia metoda jest zbieżna kwadratowo.
- Zaproponuj implementacje jednego kroku metody Newtona o możliwie niskim koszcie dla tej metody (w pseudokodzie, C/C++ lub octavie).

Zadanie 6 Do rozwiązania przybliżonego dwóch równań:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x+2), \\ g(x) &= (x+2)^5, \end{aligned}$$

których rozwiązaniem jest $x^* = -2$ zastosowano metodę Newtona.

Czy w obu przypadkach metoda będzie zbieżna lokalnie (dla x_0 przybliżenia startowego dostatecznie bliskiego x^*). Jeśli tak to określ wykładnik zbieżności w obu przypadkach.

Zadanie 7 Do rozwiązania zadania

$$f(x^*) = 0$$

z $f(x) = \exp(x) - a$ dla ustalonego $a \in (1, 4)$ zastosowano metodę iteracyjną, która w 9-tej iteracji zwróciła $x_9 > 0$ takie że mamy $|f(x_9)| = 1e - 7$. Czy na tej podstawie możemy stwierdzić, że $|x_9 - x^*| \leq 1e - 6$? Uzasadnić.

WSK: Można skorzystać z twierdzenia o wartości średniej i tego że $f(x^*) = 0$.

Zadanie 8 Dla układu równań $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ i $g(x, y) = x + 2y$ policz pierwszą iterację metody Newtona z $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Czy metoda Newtona jest w przypadku tego układu zbieżna lokalnie?

Zadanie 9 Rozpatrzmy równanie $f(x^*) = 0$ dla f gładkiej ściśle wypukłej i takiej że $f'(x^*) = 0$. Zakładamy że możemy policzyć wartość i pochodną funkcji w dowolnym punkcie. Określ która z metod iteracyjnych jest sens użyć do rozwiązania tego równania:

- metodę Newtona
- metodę bisekcji
- metodę siecznych

Zadanie 10 Do rozwiązania równań

(a) $f = (x - 2.1) * (\sin(3x) + 5x^2)$

(b) $g = x * (x - 2.1)^2$

(c) $h = \sin(x - 2.1)$

zastosowano metodę Newtona otrzymując dla $x_0 = 3$ ciągi zbieżne do $x^* = 2.1$ z następującymi błędami umieszczonymi w tabelce (pierwsza kolumna to numer iteracji) której fragment jest poniżej zamieszczony:

2	0.509	0.36	0.305
3	0.277	0.0164	0.057
4	0.146	$1.48e-06$	0.00208
5	0.0753	0	$3.25e-06$
6	0.0383	0	$7.94e-12$
7	0.0193	0	0

Określ która kolumna odpowiada której funkcji.

Zadanie 11 (trudne) Do rozwiązania układu:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x - 0.1 * \sin(1 + x + 3 * y) = 0 \\ g(x,y) &= 10 * y - \frac{1}{(x + y + 10)} = 0 \end{aligned}$$

zaproponuj metodę iteracji prostych zbieżną dla dowolnego $x_0 \geq 0$ i $y_0 \geq 0$. Czy rozwiązanie dla $x, y > 0$ jest jednoznaczne?

Oszacuj błąd $\|(x_3, y_3)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty = \max_k(|x_3 - x^*|, |y_3 - y^*|)$ dla iteracji z $x_0 = y_0 = 1$.

Wsk: to zadanie można rozwiązać znając wzór na normę macierzy

$\|A\|_\infty := \sup_{x \neq 0} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$. Możecie Państwo przyjąć że znamy powyższy wzór na tę normę.

Zadanie 12 (trudne) Do rozwiązania układu:

$$10 * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin(1 + x - y) \\ \frac{1}{(x+y+10)} \end{pmatrix} = 0$$

zaproponuj metodę iteracji prostych zbieżną dla dowolnego $x_0 \geq 0$ i $y_0 \geq 0$. Czy rozwiązanie dla $x, y > 0$ jest jednoznaczne?

Oszacuj błąd $\|(x_3, y_3)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty = \max_k(|x_3 - x^*|, |y_3 - y^*|)$ dla iteracji z $x_0 = y_0 = 1$.

Wsk: Równanie można przedstawić w postaci $\vec{x} = B * [f(\vec{x}), g(\vec{x})]^T]$ dla pewnej macierzy B wymiaru 2×2. Możecie Państwo przyjąć że znamy wzór na normę macierzową supremum.

Zadanie 13 Do rozwiązania układu:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ g(x,y) &= (y + 2)(x^3 - 1) = 0 \end{aligned}$$

zastosowano metodę Newtona z $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(a) Wykonaj 1 iteracje metody.

(b) Dla odpowiednich przybliżen początkowych można otrzymać ciągi zbieżne do rozwiązań $(1, -2), (1, 2), (-1, -2)$. Określ o ile to możliwe wykładniki zbieżności metody Newtona do tych rozwiązań (powołując się na wykład).