# Projekt - LZNK i metoda ortogonalizacji Gramma-Schmidta - 2015-16

Termin - przedostani lab na przełomie maja/czerwca. W razie znalezienia błędów, niejasności w opisie - proszę o kontakt.

Zaprogramować funkcję rozwiązującą problem znalezienia współczynników krzywej postaci $y = a(1) + a(2)\cos(x) + a(3)\sin(x)$ najlepiej przybliżającej dane punkty $(x_k, y_k)$ $k = 1, \ldots, m$ za pomocą ortogonalizacji Gramma-Schmidta tzn. szukamy $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ takiego, że

$$\sum_{k=1}^{m} |a(1)+a(2)\cos(x_k)+a(3)\sin(x_k)-y_k|^2 = \min_{\hat{a}} \sum_{k=1}^{m} |\hat{a}(1)+\hat{a}(2)\cos(x_k)+\hat{a}(3)\sin(x_k)-y_k|^2 \tag{1}$$

czyli w funkcji rozwiązujemy LZNK: $A * \hat{a} \approx \vec{y}$ z macierzą $A = [\vec{1}, \vec{\cos}(x), \vec{\sin}(x)]$ , gdzie wektory: $\vec{1} = [1, \ldots, 1]^T$ i $\vec{f}(x) = [f(x_1), \ldots, f(x_m)]^T$ i wektorem prawej strony $\vec{y} = [y_1, \ldots, y_m]^T$.

Jako dane wejściowe (input) traktujemy wektory $\vec{x}, \vec{y}$ długości $m$, jako zwracane dane (output) uzyskujemy:

- wektor $\hat{a}$ z rozwiązaniem tego LZNK,
- macierz $A$ z LZNK
- macierz górnotrójkątną $R$ wymiaru $3 \times 3$ z rozkładu QR macierzy $A$ metodą ortogonalizacji Gramma-Schmidta tzn. $A = Q * R$,
- trzykolumnową macierz $Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3]$ wymiaru $m \times 3$ - w której odpowiednie kolumny to ortonormalne wektory otrzymane przez ortogonalizację Gramma-Schmidta ,

**Testy :**

1. Przetestować dla trzech punktów z różnymi $x_k \in [0, 2 * \pi)$ - czy znajdzie prostą przechodzącą przez te punkty
2. Przetestować dla punktów leżących na ustalonej krzywej: tzn. wziąć kilka różnych (losowych?) punktów $x_k \in [0, 2*\pi)$ z $y_k = -1+2*\cos(x_k)+0.1*\sin(x_k)$ i sprawdzić czy funkcja zwróci $[-1, 2, 0.1]$.

3. Przetestować dla punktów leżących blisko danej krzywej tzn wziąć np. $x_k = 2 * \pi * k/m$ dla $k = 1, \ldots, m$ dla różnych $m > 1$ z $y_k = y_k = -1 + 2 * \cos(x_k) + 0.1 * \sin(x_k) + \epsilon_k$ dla $\epsilon_k$ losowego z zakresu $[-1e-3, 1e-3]$

   (funkcja octave'a **rand**() zwraca losowe punkty z zakresu $[0, 1]$).

4. Dla 'złych' punktów tzn. weźmy zaburzony jeden punkt tzn $x_k = 1.0 + zabx_k$ dla $zabx_k$ losowych zaburzeń z rozkładu jednorodnego z $(-zab, zab)$ i weźmy dla niego punkty $y_k = -1 + 2 * \cos(x_k) + 0.1 * \sin(x_k)$ tzn. leżące na $y = -1 + 2 * \cos(x) + 0.1 * \sin(x)$. Czy otrzymamy dokładne rozwiązanie? Jak będzie się zmieniał błąd (w wyniku zaokrągleń) w zależności od $m$ i wielkości zaburzeń? Przetestuj dla różnych $m = 20, 200, 2000, 20000$ i wielkości $zab$ w szczególności dla $zab = 10^{-k}$ dla $k = 1, 2, 3, 4$ itp. W tym przypadku proszę porównać wynik otrzymany Państwa funkcją z wynikiem z octave'a otrzymany m przez operator backslash.

5. Sprawdzić czy rzeczywiście dla otrzymanych macierzy $Q, R, A$ zachodzi

   $$A = Q * R, \qquad Q^T Q = I_{3\times 3}.$$

   W szczególności przetestować dla $A$ z kolumnami prawie liniowo zależnymi tzn. wziąć macierze z poprzedniego testu.

6. Porównać otrzymane macierze z macierzami wygenerowanymi przez funkcję octave'a: [Q1,R1]=**qr**(A) czy $Q, R$ otrzymane naszą metodą jakoś się mają do macierzy czy ewentualnie ich podmacierzy $Q1, R1$? a jeśli tak to sprawdzić różnicę tzn. policzyć normę pierwszą indukowaną odpowiednich różnic.

Przy testowaniu mogę poprosić o inne testy np. z innymi punktami.