

# Aproksymacja jednostajna i w normie Hilberowskiej. Kwadratury

Wielomian stopnia  $\leq p$  najlepszej aproksymacji jednostajnej dla funkcji  $f$  na  $[a, b]$  to element najlepszej aproksymacji w normie  $\|g\|_{\infty, [a, b]} = \max_{t \in [a, b]} |g(t)|$  dla  $f$  w  $\mathcal{P}_p$  przestrzeni wielomianów stopnia  $\leq p$ . Wielomian stopnia  $\leq p$  najlepszej aproksymacji dla funkcji  $f$  na  $[a, b]$  w normie  $\|\cdot\|$  to element najlepszej aproksymacji w tej normie dla  $f$  w  $\mathcal{P}_p$ . Wielomian liniowy, kwadratowy, kubiczny oznacza element  $\mathcal{P}_k$  dla odpowiednio  $k = 1, 2, 3$ .

**Zadanie 1** Rozpatrzmy  $g(x) = \sin(x)$  i zadania znalezienia wielomianów najlepszej aproksymacji dla  $g$ :  $w_1 \in V_1 = \mathcal{P}_n$  i  $w_2 \in V_2 = \mathcal{P}_{n-1}$  dla  $n > 0$  w normie:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos(x)) |f(x)|^2 dx}.$$

(a) Znajdź  $w_1, w_2$  dla  $n = 1$ .

(b) Dla jakich  $n > 0$  prawdą jest, że  $w_1 = w_2$ ? Uzasadnij odpowiedź.

**Zadanie 2** Niech  $V = \{w \in \mathcal{P}_3 : w(0) = 1\}$ . Znajdź dla  $f = \sin(x)$  taki  $w_f \in V$ , że

$$\|w_f - f\| = \min_{v \in V} \|v - f\|$$

dla  $\|g\|^2 = \int_{-1}^1 |g(t)|^2 dt + |g(0)|^2$  i  $\mathcal{P}_3$  przestrzeni wielomianów stopnia  $\leq 3$ .

Wsk: Pokaż że to norma generowana przez odpowiedni iloczyn skalarny i że  $V = v_0 + V_0$  dla pewnego  $v_0$  i  $V_0$  odpowiedniej przestrzeni liniowej tzn. jest przestrzenią afiniczną.

**Zadanie 3** Niech  $V = \{w \in \mathcal{P}_4 : w(-1) = 0\}$ . Znajdź dla  $f = \cos(x)$  taki  $w_f \in V$ , że

$$\|w_f - f\| = \min_{v \in V} \|v - f\|$$

dla  $\|g\|^2 = \int_{-1}^1 |g'(t)|^2 dt$ . Tu  $\mathcal{P}_k$  przestrzeń wielomianów stopnia  $\leq k$ .

Wsk: Pokaż że to norma generowana przez odpowiedni iloczyn skalarny.

**Zadanie 4** Pokaż że jeśli waga  $\rho$  jest funkcją parzystą to  $P_k$  jest odpowiednio funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy gdy  $k > 0$  parzyste. Tu  $P_k$  k-ty wielomian ortogonalny w  $L^2_{\rho}(-1, 1)$ .

**Zadanie 5** Pokaż że jeśli waga  $\rho$  jest funkcją parzystą to  $P_{2k+1}(0) = 0$  a  $P_{2k}(0) \neq 0$  dla  $P_k$  k-tego wielomianu ortogonalnego w  $L^2_{\rho}(-1, 1)$ .

**Zadanie 6** Znajdź 3 pierwsze wielomiany ortogonalne w  $L^2_{\rho}(-1, 1)$  dla wagi  $\rho = 1 + |x|$ . Znajdź element najlepszej aproksymacji w przestrzeni wielomianów stopnia  $\leq 2$  dla  $f(x) = \sin(x)$  w tej przestrzeni. Wystarczy znaleźć współczynniki w jakiegokolwiek bazie tej przestrzeni.

**Zadanie 7** Dla  $f(x) = |x|$  znajdź  $w_f \in \mathcal{P}_1$  wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty, [-1, 2]} = \min_{v \in \mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty, [-1, 2]}$$

dla  $\|g\|_{\infty, [a, b]} = \max_{t \in [a, b]} |g(t)|$ . Tu  $\mathcal{P}_k$  przestrzeń wielomianów stopnia  $\leq k$ .

**Zadanie 8** Dla  $f(x) = x^2 - 10x + 1$  znajdź  $w_f \in \mathcal{P}_1$  wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty, [-1, 2]} = \min_{v \in \mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty, [-1, 2]}$$

dla  $\|g\|_{\infty, [a, b]} = \max_{t \in [a, b]} |g(t)|$ . Tu  $\mathcal{P}_k$  przestrzeni wielomianów stopnie  $\leq k$ .

**Zadanie 9** Czy istnieje takie  $L$  że wielomianem najlepszej aproksymacji jednostajnej w  $\mathcal{P}_9$  na  $[0, L]$  dla  $f(x) = \sin(\pi x)$  będzie  $w_f = 0$ ? WSK: określ warunek na alternans....

**Zadanie 10** Dla  $f(x) = x^4 - 3x + 1$  znajdź kwadratowy wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na  $[-1, 1]$ .

**Zadanie 11** Dla  $f(x) = (x - 2)^3 - 3$  znajdź kwadratowy wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na  $[0, 4]$ .

**Zadanie 12** (trudne) Dla  $f(x) = x^4 - 3x + 1$  znajdź kwadratowy wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na  $[-1, 1]$ .

**Zadanie 13** (a) Pokaż, że element najlepszej aproksymacji jednostajnej, czyli w normie  $\|\cdot\|_{\infty}$ , w  $P_n$  na  $[a, b]$  dla dowolnej funkcji ciągłej  $f$  interpoluje tę funkcję w  $n + 1$  punktach na  $[a, b]$ .

(b) Czy prawdą jest, że dla danej funkcji  $f$  ciągłej na  $[a, b]$  zawsze istnieje ciąg węzłów  $\{x_k^n\}_{k=0}^n \subset [a, b]$  taki, że ciąg wielomianów stopni nie większych od  $n$ :  $L_n f$  interpolujących tę funkcję w tych węzłach (tzn.  $L_n f(x_k^n) = f(x_k^n)$ ) zbiega jednostajnie do tej funkcji? Uzasadnij odpowiedź.

**Zadanie 14** Znajdź kwadraturę maksymalnego rzędu dla  $I(f) = \int_a^b f(x)(x - \frac{a+b}{2})^2 dx$  postaci

$$Qf = Af(a) + Bf(b) + Cf(c)$$

dla  $A, B, C$  współczynników i  $c$  punktu w  $(a, b)$ .

Podaj rząd tej kwadratury i oszacuj błąd  $|Q(f) - I(f)|$  dla  $f \in C^3([a, b])$  z  $|f^{(3)}(x)| \leq M$  dla  $x \in [a, b]$ .

**Zadanie 15** Szukamy kwadratury na  $n + 1$  punktach o maksymalnym rzędzie dla  $I(f) = \int_a^b f dt$  postaci:

$$Q_n f = A_1 f(a) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

dla  $x_k \in (a, b)$ .

Wyznacz jaką taką kwadraturę ma rząd i czy węzły  $x_k$  wyznaczone są jednoznacznie.

Policz węzły i współczynniki  $Q_2 f$  tzn. podaj taką kwadraturę dla  $n = 2$ .

**Zadanie 16** Pokaż, że jeśli waga jest symetryczna względem środka odcinka tzn.  $\rho(x + \frac{a+b}{2}) = \rho(-x + \frac{a+b}{2})$  to węzły kwadratury Gaussa dla  $\int_a^b f(t)\rho(t) dt$  są też symetryczne względem  $\frac{a+b}{2}$ .

Znajdź choć jeden węzeł kwadratury Gaussa opartej na 7 punktach dla wagi  $\rho(x) = (1 + x^2) * \cos(x)$  na  $[-1, 1]$ .

**Zadanie 17** Podaj najmniejsze  $N$  takie, że błąd pomiędzy złożoną kwadraturą prostokątów (równomierny podział odcinka)  $P_N f$  na  $[-100, 100]$  a  $\int_{-100}^{100} f dt$  dla  $f(x) = \sin(x)$  był mniejszy od  $10^{-9}$ .

**Zadanie 18** Oznaczenia

$$F_M^r = \{f \in C^{r+1}([a, b]) : \max_{x \in [a, b]} |f^{(r+1)}(x)| \leq M\}$$

oraz

$$S(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Dla kwadratur interpolacyjnych opartych na 2 węzłach znaleźć węzły i postać kwadratury interpolacyjnej która minimalizuje błąd na klasie  $F_M^1$ , tzn. taką  $Q^* \in Kw_2$  dla  $Kw_2$  zbioru kwadratur interpolacyjnych na 2 punktach dla  $S(f)$ , że

$$\min_{Q \in Kw_2} \max_{f \in F_M^1} |S(f) - Q(f)| = |S(f) - Q^*(f)|.$$

W wersji prostszej, która mogła być/będzie na ćwiczeniach szukamy kwadratury interpolacyjnej minimalizującej błąd w tej klasie z dwoma węzłami symetrycznymi względem środka odcinka  $[a, b]$ , czy w kolejnej wersji z jednym ustalonym węzłem np. punktem  $b$ .

**Zadanie 19** Pokaż, że jeśli  $G_{n+1}$  jest kwadraturą Gaussa na  $n + 1$  różnych punktach w  $\{x_k\}_{k=0}^n$  w  $(a, b)$  dla  $I(f) = \int_a^b f \rho dx$  ( $\rho$  waga) to

$$G_{n+1} f = \int_a^b p_{2n+2, f}(x) dx$$

gdzie  $p_{2n+2, f}$  jest wielomianem Hermite'a  $f$  dla węzłów  $\{x_k\}_{k=0}^n$  z podwojoną krotnością dwa tzn.  $p \in P_{2n+2}$  i  $f^{(k)}(x_j) = p_{2n+2, f}^{(k)}(x_j)$  dla  $k = 0, 1$  i  $j = 0, \dots, n$ .

Korzystają z wzoru na błąd interpolacji Hermite'a dla podwójnych węzłów:

$$f(t) - p_{2n+2, f}(t) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \prod_{j=0}^n (t - x_j)^2 \quad (1)$$

dla pewnego  $\eta$  zależnego w ogólności od  $t$ , (dowód to kolejne zadanie) pokaż, że istnieje  $\xi \in [a, b]$  takie, że

$$I(f) - G_{n+1} f = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \prod_{j=0}^n (x - x_j)^2 \rho dx = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \|P_{n+1}\|_{L_\rho^2(a, b)}^2$$

o ile  $f \in C^{2n+2}$ . Tu  $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + \dots$  to  $n + 1$  wielomian ortogonalny w  $L_\rho^2(a, b)$ .

**Zadanie 20** Rozpatrzmy kwadraturę o różnych węzłach  $(x_k)_{k=0}^n$  w  $(a, b)$  przybliżającą całkę  $I_\rho(f) = \int_a^b f \rho dx$  postaci:

$$Qf = \sum_{k=0}^n (A_k f(x_k) + B_k f'(x_k))$$

tzn. wykorzystującą wartości funkcji i jej pochodnej w węzłach. Określ jaki może być maksymalnie rząd takiej kwadratury.

Wsk: można skorzystać z wzoru na błąd interpolacji Hermite'a (1) podanego w zadaniu 19.