

# Równania nieliniowe

Zadania oznaczone jako trudne nie pojawią się na kartkówce. (choć wcale nie muszą być tak naprawdę trudne...)

**Zadanie 1** Dla równania  $\frac{1}{x+2} - 200 + 0.5x = 0$

- pokaż że istnieje rozwiązanie  $x^* \in [0, 1000]$
- określ czy rozwiązanie jest jednoznaczne na  $[0, 1000]$
- zaproponuj metodę iteracji prostych zbieżną dla dowolnego  $x_0$  z  $[0, 1000]$ .
- oszacuj błąd dla 20-tej iteracji tej metody dla  $x_0 = 400$  tzn oszacuj  $|x_{20} - x^*|$ .

**Zadanie 2** Czy metoda Newtona zastosowana do równania  $\frac{1}{x+2} - 200 + 0.5x = 0$  będzie zbieżna lokalnie kwadratowo dla rozwiązania tego równania na  $[0, 1000]$ ? Czy metoda Newtona zastosowana do tego równania z  $y_0 = 400$  będzie zbieżna? jeśli tak to oszacuj błąd  $|y_4 - x^*|$  dla  $y_k$  k-tej iteracji metody Newtona z  $y_0 = 400$ .

**Zadanie 3** Pokaż, że równanie

$$x^* - 0.7 * \sin(x^*) = -23$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie i że następująca metoda iteracyjna

$$x_n = 0.7 * \sin(x_{n-1}) - 23$$

zbieżnie dla dowolnego  $x_0 \in \mathbb{R}$  do rozwiązania tego równania.

Oszacuj możliwie dokładnie błąd  $|x_9 - x^*|$  dla  $x_0 = -23$ .

**Zadanie 4** Dla równania

$$f(x) = 5 - \exp(x) = 0.$$

Pokaż, że

- Istnieje dokładnie jedno rozwiązanie  $x^*$  tego równania.
- udowodnij, że dla dowolnego  $x_0 \in \mathbb{R}$  metoda Newtona zbieżnie do  $x^*$ .
- Zaproponuj implementację jednego kroku metody Newtona o możliwie niskim koszcie dla tej metody (w pseudokodzie, C/C++ lub octave).

**Zadanie 5** Do rozwiązania przybliżonego dwóch równań:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x + 2), \\ g(x) &= (x + 2)^5, \end{aligned}$$

których rozwiązaniem jest  $x^* = -2$  zastosowano metodę Newtona.

Czy w obu przypadkach metoda będzie zbieżna lokalnie (dla  $x_0$  przybliżenia startowego dostatecznie bliskiego  $x^*$ ). Jeśli tak to określ wykładnik zbieżności w obu przypadkach.

**Zadanie 6** Do rozwiązania zadania

$$f(x^*) = 0$$

z  $f(x) = \exp(x) - a$  dla ustalonego  $a \in (1, 4)$  zastosowano metodę iteracyjną, która w 9-tej iteracji zwróciła  $x_9 > 0$  takie że mamy  $|f(x_9)| = 1e-7$ . Czy na tej podstawie możemy stwierdzić, że  $|x_9 - x^*| \leq 1e - 6$ ? Uzasadnić.

WSK: Można skorzystać z twierdzenia o wartości średniej i tego że  $f(x^*) = 0$ .

**Zadanie 7** Dla układu równań  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  i  $g(x, y) = x + 2y$  policz pierwszą iterację metody Newtona z  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ . Czy metoda Newtona jest w przypadku tego układu zbieżna lokalnie?

**Zadanie 8** Rozpatrzmy równanie  $f(x^*) = 0$  dla  $f$  gładkiej ściśle wypukłej i takiej że  $f'(x^*) = 0$ . Zakładamy że możemy policzyć wartość i pochodną funkcji w dowolnym punkcie. Określ która z metod iteracyjnych jest sens użyć do rozwiązania tego równania:

- metodę Newtona
- metodę bisekcji
- metodę siecznych

**Zadanie 9** Do rozwiązania równań

(a)  $f = (x - 2.1) * (\sin(3x) + 5x^2)$

(b)  $g = x * (x - 2.1)^2$

(c)  $h = \sin(x - 2.1)$

zastosowano metodę Newtona otrzymując dla  $x_0 = 3$  ciągi zbieżne do  $x^* = 2.1$  z następującymi błędami umieszczonymi w tabelce (pierwsza kolumna to numer iteracji) której fragment jest poniżej zamieszczony:

2	0.509	0.36	0.305
3	0.277	0.0164	0.057
4	0.146	$1.48e - 06$	0.00208
5	0.0753	0	$3.25e - 06$
6	0.0383	0	$7.94e - 12$
7	0.0193	0	0

Określ która kolumna odpowiada której funkcji.

**Zadanie 10** (trudne) Do rozwiązania układu:

$$f(x, y) = x - 0.1 * \sin(1 + x + 3 * y) = 0$$

$$g(x, y) = 10 * y - \frac{1}{(x + y + 10)} = 0$$

zaproponuj metodę iteracji prostych zbieżną dla dowolnego  $x_0 \geq 0$  i  $y_0 \geq 0$ . Czy rozwiązanie dla  $x, y > 0$  jest jednoznaczne?

Oszacuj błąd  $\|(x_3, y_3)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty = \max_k(|x_3 - x^*|, |y_3 - y^*|)$  dla iteracji z  $x_0 = y_0 = 1$ .

Wsk: to zadanie można rozwiązać znając wzór na normę macierzy

$\|A\|_\infty := \sup_{x \neq 0} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ . Możecie Państwo przyjąć że znamy powyższy wzór na tę normę.

**Zadanie 11** (trudne) Do rozwiązania układu:

$$10 * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin(1 + x - y) \\ \frac{1}{(x+y+10)} \end{pmatrix} = 0$$

zaproponuj metodę iteracji prostych zbieżną dla dowolnego  $x_0 \geq 0$  i  $y_0 \geq 0$ . Czy rozwiązanie dla  $x, y > 0$  jest jednoznaczne?

Oszacuj błąd  $\|(x_3, y_3)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty = \max_k(|x_3 - x^*|, |y_3 - y^*|)$  dla iteracji z  $x_0 = y_0 = 1$ .

Wsk: Równanie można przedstawić w postaci  $\vec{x} = B * [f(\vec{x}), g(\vec{x})]^T$  dla pewnej macierzy  $B$  wymiaru  $2 \times 2$ . Możecie Państwo przyjąć że znamy wzór na normę macierzową supremum.