Projekt - LZNK i metoda ortogonalizacji Gramma-Schmidta

Zaprogramować funkcję rozwiązującą problem znalezienia współczynników prostej $y = ax + b$ najlepiej przybliżającej dane punkty (x_k, y_k) $k = 1, \ldots, m$ za pomocą ortogonalizacji Gramma-Schmidta tzn. szukamy (a, b) takiego, że

$$\sum_{k=1}^{m} |ax_k + b - y_k|^2 = \min_{\hat{a},\hat{b}} \sum_{k=1}^{m} |\hat{a}x_k + \hat{b} - y_k|^2 \tag{1}$$

czyli w funkcji rozwiązujemy LZNK: $A * [a; b] \approx \vec{y}$ z macierzą $A = [\vec{x}, \vec{1}]$ dla wektorów $\vec{1} = [1, \ldots, 1]^T$, $\vec{x} = [x_1, \ldots, x_m]^T$ i wektorem prawej strony $\vec{y} = [y_1, \ldots, y_m]^T$.

Jako dane wejściowe (input) traktujemy wektory $\vec{x}, \vec{y}$ długości m, jako zwracane dane (output) uzyskujemy:

- wektor $[a; b]$ z rozwiązaniem tego LZNK,
- macierz A z LZNK
- macierz górnotrójkątną R wymiaru 2×2 z rozkładu QR macierzy A metodą ortogonalizacji Gramma-Schmidta tzn. $A = Q * R$,
- dwukolumnową macierz $Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2]$ wymiaru $m \times 2$ -w której odpowiednie kolumny to ortonormalne wektory otrzymane przez ortogonalizację Gramma-Schmidta ,

Testy:

1. Przetestować dla dwóch różnych punktów z różnymi x_k - czy znajdzie prostą przechodzącą przez te punkty
2. Przetestować dla punktów leżących na prostej: tzn. wziąć kilka różnych (losowych?) punktów x_k z $y_k = 2 * x_k - 10$ i sprawdzić czy funkcja zwróci $a = 2, b = -10$.
3. Przetestować dla punktów leżących blisko danej prostej tzn wziąć np. $x_k = k/m$ dla $k = 1, \ldots, m$ dla różnych $m > 1$ z $y_k = x_k + 2 + \epsilon_k$ dla ϵ_k losowego z zakresu $[-1e-3, 1e-3]$ (funkcja octave'a **rand**() zwraca losowe punkty z zakresu $[0, 1]$).
4. Dla 'złych' punktów tzn. weźmy zaburzony jeden punkt tzn $x_k = 2.0 + zabx_k$ dla $zabx_k$ losowych zaburzeń z rozkładu jednorodnego z $(-zab, zab)$ i weźmy dla niego punkty $y_k = 1 + 2 * x_k$ tzn. leżące na prostej $y = 1 + 2 * x$. Czy otrzymamy dokładne rozwiązanie? Jak będzie się zmieniał błąd (w wyniku zaokrągleń) w zależności od m i wielkości zaburzeń? Przetestuj dla różnych $m = 2, 20, 200, 2000, 20000$ i wielkości zab w szczególności dla $zab = 10^{-k}$ dla $k = 2, 4, 5, 8$ itp.
5. Sprawdzić czy rzeczywiście dla otrzymanych macierzy Q, R, A zachodzi

   $$A = Q * R, \qquad Q^T Q = I_{2\times 2}.$$

   W szczególności przetestować dla A z kolumnami prawie liniowo zależnymi tzn. macierze z poprzedniego testu lub np. zaburzając x_1 tzn. $\vec{x} = 2 * \vec{1} + \epsilon * \vec{e}_1$ dla losowych ϵ takich, że $|\epsilon| \leq 10^{-k}$ dla k np. $8, 10, 16, 20$ etc a $\vec{e}_1$ pierwszym wersorem.

6. Porównać otrzymane macierze z macierzami wygenerowanymi przez funkcję octave'a : [Q1,R1]=**qr**(A) czy Q, R otrzymane naszą metodą jakoś się mają do macierzy czy ewentualnie ich podmacierzy $Q1, R1$? a jeśli tak to sprawdzić różnicę tzn. policzyć normę pierwszą indukowaną odpowiednich różnic.

Przy testowaniu mogę poprosić o inne testy np. z innymi punktami.