

Kwadratury

Uwaga - zadania są też na kolejnych stronach.

Zadanie 1 Znajdź kwadraturę maksymalnego rzędu dla $I(f) = \int_a^b f(x)(x - \frac{a+b}{2})^2 dx$ postaci

$$Qf = Af(a) + Bf(b) + Cf(c)$$

dla A, B, C współczynników i c punktu w (a, b) .

Podaj rząd tej kwadratury i oszacuj błąd $|Q(f) - I(f)|$ dla $f \in C^3([a, b])$ z $|f^{(3)}(x)| \leq M$ dla $x \in [a, b]$.

Zadanie 2 Szukamy kwadratury na $n + 1$ punktach o maksymalnym rzędzie dla $I(f) = \int_a^b f dt$ postaci:

$$Q_n f = A_1 f(a) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

dla $x_k \in (a, b]$.

Wyznacz jaki taka kwadratura ma rząd i czy węzły x_k wyznaczone są jednoznacznie.

Policz węzły i współczynniki $Q_2 f$ tzn. podaj taką kwadraturę dla $n = 2$.

Zadanie 3 Pokaż, że jeśli waga jest symetryczna względem środka odcinka tzn. $\rho(x + \frac{a+b}{2}) = \rho(-x + \frac{a+b}{2})$ to węzły kwadratury Gaussa dla $\int_a^b f(t)\rho(t) dt$ są też symetryczne względem $\frac{a+b}{2}$.

Znajdź choć jeden węzeł kwadratury Gaussa opartej na 7 punktach dla wagi $\rho(x) = (1 + x^2) * \cos(x)$ na $[-1, 1]$.

Zadanie 4 Podaj najmniejsze N takie, że błąd pomiędzy złożoną kwadraturą prostokątów (równomierny podział odcinka) $P_N f$ na $[-100, 100]$ a $\int_{-100}^{100} f dt$ dla $f(x) = \sin(x)$ był mniejszy od 10^{-9} .

Zadanie 5 Oznaczenia

$$F_M^r = \{f \in C^{r+1}([a, b]) : \max_{x \in [a, b]} |f^{(r+1)}(x)| \leq M\}$$

oraz

$$S(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Dla kwadratur interpolacyjnych opartych na 2 węzłach znaleźć węzły i postać kwadratury interpolacyjnej która minimalizuje błąd na klasie F_M^1 , tzn. taką $Q^* \in Kw_2$ dla Kw_2 zbioru kwadratur interpolacyjnych na 2 punktach dla $S(f)$, że

$$\min_{Q \in Kw_2} \max_{f \in F_M^1} |S(f) - Q(f)| = |S(f) - Q^*(f)|.$$

W wersji prostszej, która mogła być/będzie na ćwiczeniach szukamy kwadratury interpolacyjnej minimalizującej błąd w tej klasie z dwoma węzłami symetrycznymi względem środka odcinka $[a, b]$, czy w kolejnej wersji z jednym ustalonym węzłem np. punktem b .

Zadanie 6 Pokaż, że jeśli G_{n+1} jest kwadraturą Gaussa na $n + 1$ różnych punktach w $\{x_k\}_{k=0}^n$ w (a, b) dla $I(f) = \int_a^b f \rho dx$ (ρ waga) to

$$G_{n+1}f = \int_a^b p_{2n+2,f}(x) dx$$

gdzie $p_{2n+2,f}$ jest wielomianem Hermite'a f dla węzłów $\{x_k\}_{k=0}^n$ z podwojoną krotnością dwa tzn. $p \in P_{2n+2}$ i $f^{(k)}(x_j) = p_{2n+2,f}^{(k)}(x_j)$ dla $k = 0, 1$ i $j = 0, \dots, n$.

Korzystają z wzoru na błąd interpolacji Hermite'a dla podwójnych węzłów:

$$f(t) - p_{2n+2,f}(t) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \prod_{j=0}^n (t - x_j)^2 \quad (2.1)$$

dla pewnego η zależnego w ogólności od t , (dowód to kolejne zadanie) pokaż, że istnieje $\xi \in [a, b]$ takie, że

$$I(f) - G_{n+1}f = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \prod_{j=0}^n (x - x_j)^2 \rho dx = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \|P_{n+1}\|_{L_\rho^2(a,b)}^2$$

o ile $f \in C^{2n+2}$. Tu $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + \dots$ to $n + 1$ wielomian ortogonalny w $L_\rho^2(a, b)$.

Zadanie 7 Rozpatrzmy kwadraturę o różnych węzłach $(x_k)_{k=0}^n$ w (a, b) przybliżającą całkę $I_\rho(f) = \int_a^b f \rho dx$ postaci:

$$Qf = \sum_{k=0}^n (A_k f(x_k) + B_k f'(x_k))$$

tzn. wykorzystującą wartości funkcji i jej pochodnej w węzłach. Określ jaki może być maksymalnie rząd takiej kwadratury.

Wsk: można skorzystać z wzoru na błąd interpolacji Hermite'a (2.1) podanego w zadaniu 6.