

## Interpolacja wielomianowa, funkcje sklepane (splajny)

**Zadanie 1** Dla funkcji  $f(x) = x^7 - 7 * x$  znajdź  $w$  wielomian możliwie niskiego stopnia interpolujący tę funkcję w węzłach o krotności dwa  $\{-1, 0, 1\}$  za pomocą algorytmu różnic dzielonych, tzn.  $w(x_j) = f(x_j)$  i  $w'(x_j) = f'(x_j)$  dla  $x_j$  jednego z trzech węzłów.

**Zadanie 2** Dla funkcji  $f(x) = x^4 - 7 * x$  znajdź wielomian  $p$  stopnie nie większego od trzech taki, że

$$\|f - p\|_{\infty, [-1, 3]} = \inf_{s \in P_3} \|f - s\|_{\infty, [-1, 3]}$$

czy jest on wyznaczony jednoznacznie? Podaj ile wynosi  $\|f - p\|_{\infty, [-1, 3]}$ . Tu  $P_3$  wielomiany stopnia  $\leq 3$ .

**Zadanie 3** Pokaż, że dla różnych  $n+1$  punktów  $\{x_k\}_{k=0}^n$  prawdziwy jest wzór na różnicę dzieloną dla funkcji  $f$  określonej na tych punktach:

$$f[x_0, \dots, x_{n+1}] = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)}$$

**Zadanie 4** Pokaż że dla dwóch różnych punktów  $x_0, x_1$  i funkcji klasy  $C^1$  prawdziwy jest wzór:

$$f[x_0, x_1] = \int_0^1 f'((1-s)x_0 + sx_1) ds$$

**Zadanie 5** (trudne) Pokaż, że dla różnych  $n + 1$  punktów  $\{x_k\}_{k=0}^n$  prawdziwy jest wzór całkowy Hermite'a-Genocchiego na różnicę dzieloną dla funkcji  $f$  określonej na tych punktach:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \int_{S_n} f^{(n)}(s_0 x_0 + s_1 x_1 + \dots + s_n x_n) ds$$

gdzie  $S_n$  sympleks jednostkowy w  $n + 1$  wymiarach tzn.

$$S_n = \{u = (s_0, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : s_i \geq 0, \sum_{k=0}^n s_k = 1\}.$$

Wsk: Poprzednie zadanie + indukcja korzystająca z przemienności węzłów w różnicy dzielonej tzn.  $f[x_{i_0}, \dots, x_{i_n}] = f[x_1, \dots, x_n]$ . Tu  $(i_0, \dots, i_n)$  permutacja zbioru  $\{0, \dots, n\}$ . Jeśli Państwo sami tego nie potraficie udowodnić, to rozwiązanie można znaleźć w książce Kincaid, Cheney - Analiza numeryczna, WNT.

**Zadanie 6** Na odcinku  $[0, 10]$  mamy węzły równo-odległe:  $\{x_k\}_{k=0}^N$  z  $x_k = k * h$  dla  $h = \frac{10}{N}$ . Dla danej funkcji  $f(x) = \sin(4 * x)$  definiujemy funkcję ciągłą  $s \in C([a, b])$  taką, że na każdym pod-odcinku  $(x_k, x_{k+1})$  ta funkcja  $s$  jest wielomianem stopnia co najwyżej dwa i spełnia warunki interpolacyjne:

$$\begin{aligned} s(x_k) &= f(x_k) & k &= 0, \dots, N \\ s\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) &= f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) & k &= 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

(a) Czy taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie?

(b) Wyznacz możliwie małą stałą  $C > 0$  niezależną od  $h$  taką, że

$$\|f - s\|_{\infty, [0,10]} \leq C h^3.$$

**Zadanie 7** Na odcinku  $[a, b]$  mamy zadane węzły :  $a = x_0 < \dots < x_N = b$ . Niech  $s$  splajn kubiczny na tym podziale odcinka (czyli funkcja w  $C^2([a, b])$  na pod-odcinkach będąca wielomianem kubicznym) i  $f \in C^2([a, b])$  taka, że

$$f'(a) = f'(b) = f(x_k) = 0 \quad k = 0, \dots, N.$$

Pokaż, że

$$\int_a^b f^{(2)} s^{(2)} dx = 0.$$

**Zadanie 8** Dla danych różnych węzłów  $\{x_k\}_{k=0}^n \subset [a, b]$  niech  $\{l_k\}_{k=0}^n$  będzie bazą Lagrange'  $\mathcal{P}_n$  a dla tych węzłów, i niech  $L_n f$  wielomian interpolujący daną funkcję ciągłą  $f \in C([a, b])$  w tych węzłach. Pokaż oszacowania

- normy operatora interpolacji

$$\|L_n f\|_{\infty, [a, b]} \leq \left( \sum_{k=0}^n \|l_k\|_{\infty, [a, b]} \right) \|f\|_{\infty, [a, b]}.$$

- dla dowolnego  $w \in P_n$

$$\|f - L_n f\|_{\infty, [a, b]} \leq \left( 1 + \sum_{k=0}^n \|l_k\|_{\infty, [a, b]} \right) \|f - w\|_{\infty, [a, b]}$$

dla  $P_n$  przestrzeni wielomianów stopnie nie większego od  $n$ .

**Zadanie 9** Na odcinku  $[a, b]$  mamy zadane węzły :  $a = x_0 < \dots < x_N = b$ . Niech  $V$  przestrzeń splajnów kubicznych okresowych na tym podziale odcinka czyli przestrzeń funkcji  $s \in C^2([a, b])$  na pod-odcinkach będących wielomianami kubicznymi takie, że

$$s^{(r)}(a) = s^{(r)}(b) \quad r = 0, 1, 2.$$

Wyznacz wymiar przestrzeni  $V$ .

**Zadanie 10** Znajdź wzory na funkcję  $B$  klasy  $C^2(\mathbb{R})$  taką, że  $B$  jest wielomianem stopnia nie większego od trzech na każdym odcinku  $[k, k+1)$  dla  $k$  całkowitego,  $B(x) = 0$  dla  $x \in (-\infty, -2] \cap [2, \infty)$ ,  $B(0) = 4$  i  $B(-1) = B(1) = 1$ . Czy funkcja jest wyznaczona jednoznacznie? **Wsk:** Funkcja jest parzysta i może pomóc interpolacja Hermite'a na dwóch węzłach. (rozwiązanie tego zadania było na ćwiczeniach).

**Zadanie 11** Na odcinku  $[a, b]$  mamy zadane węzły równoodległe:  $a = x_0 < \dots < x_N = b$  z  $x_k = a + k * h$  i  $h = (b - a)/N$ . Dodajemy dwa węzły poza odcinkiem  $x_{-1} = a - h$  i  $x_{N+1} = b + h$ . Wprowadzamy  $B_j(x) = B((x - x_j)/h)$  dla  $B$  z poprzedniego zadania. Pokaż, że  $\{B_j\}_{j=-1,0,1,\dots,N,N+1}$  tworzą bazę splajnów kubicznych obciętych do  $[a, b]$ .

**Zadanie 12** Rozpatrzmy funkcję  $f$  i s jej splajn kubiczny naturalny interpolacyjny dla zadanego podziału  $[a, b]$ :  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ . Niech  $\hat{s}$  splajn interpolacyjny kubiczny naturalny dla  $\hat{f}$  takiego, że w węzłach  $|f(x_k) - \hat{f}(x_k)| \leq \delta$ . Oszacuj  $\|s - \hat{s}\|_\infty$ .

Wsk: Można się przyjrzeć dowodowi oszacowania błędu dla splajny kubicznego interpolacyjnego naturalnego.

**Zadanie 13** Rozpatrzmy funkcję  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 8^{-k} \cos(2^k x)$ . Rozpatrzmy obcięcie tego szeregu:  $f_M(x) = \sum_{k=0}^M 8^{-k} \cos(2^k x)$ . Niech  $s_{M,N}$  splajn kubiczny interpolacyjny naturalny na podziale równomiernym odcinka  $[0, 1]$  tzn.  $x_k = k * h$  dla  $h = 1/N$  taki, że  $f_M(x_k) = s_{M,N}(x_k)$ .

- Dla zadanego  $\delta$  wyznacz najmniejsze  $M = M(\delta)$  takie, aby  $|f_M(x) - f(x)| \leq \delta$  dla  $x \in [0, 1]$ .
- Oszacuj  $|f^{(2)}(x)|$  dla  $x \in [0, 1]$ .
- Dla zadanego  $\epsilon$  wyznacz  $N$  i  $M$  takie, że

$$\|f - s_{M,N}\|_{\infty, [0,1]} \leq \epsilon.$$

WSK: Przy rozwiązywaniu ostatniego punktu można np. skorzystać z punktów poprzednich, oszacowania błędu interpolacji splajnami kubicznymi z wykładu i z poprzedniego zadania, ewentualnie inaczej i w sumie dużo prościej oszacować normy  $f - f_M$  i  $f_M - s_{M,N}$  (jak?).