Numeryczna algebra liniowa

Tzn.: układy równań liniowych, uwarunkowanie i normy macierzy, LZNK, numeryczne zadanie własne.

Zadanie 1 Mamy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ i A macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko w ostatniej kolumnie i na 3 głównych diagonalach tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & d_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & d_{n-2} \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa (rozkładu LU) bez wybory elementu głównego możliwie niskim koszcie względem n. Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej C i p naturalnego).

Zadanie 2 Treść jak w zadaniu 1 ale dla

- układu równań liniowych $A^T x = f$ z A z zadania 1,
- układu równań następującej postaci:

$$b_k x_{k-1} + a_k x_k + c_k x_{k+1} = f_k \qquad k = 1, \ldots, n,$$

przyjmując, że $x_0 = x_n$ i $x_{n+1} = x_1$, tzn. macierz jest trójdiagonalna + 2 elementy niezerowe w 2 pozostałych rogach. Współczynniki a_k, b_k, c_k, f_k dane.

Zadanie 3 Sprawdź czy dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

istnieje rozkład LU a jeśli tak to go wyznacz (przyjmując że macierz L ma jedynki na diagonali). Jeśli nie to wyznacz za pomocą algorytmu eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego (częściowym osiowaniem) macierz permutacji P oraz czynniki rozkładu tak aby ten rozkład istniał dla PA.

Zadanie 4 Dla macierzy A wymiaru 10×10 z Zadania 1 dla $a_k = d_k = -b_k = -c_k = 1$ dla wszystkich odpowiednich k, oblicz indukowaną normę maksimum i normę pierwszą tzn. $\|A\|_\infty$ i $\|A\|_1$ i wyznacz takie dwa wektory x_1 i x_2, że $\|A\|_\infty = \|Ax_1\|_\infty$ i $\|A\|_1 = \|Ax_2\|_1$. Czy wektory x_k są wyznaczone w obu przypadkach jednoznacznie (z dokładnością do mnożenia przez -1)?

Zadanie 5 Podaj przykład normy $\|\cdot\|$ w $\mathbb{R}^2$ dla której optymalne stałe równoważności z normą drugą to 1 i 10^{50} tzn. :

$$\forall x \qquad \|x\|_2 \leq \|x\| \leq 10^{50} \|x\|_2$$

i dla pewnych niezerowych wektorów zachodzą równości zamiast nierówności.

Zadanie 6 Po rozwiązaniu w arytmetyce fl pewnego układu równań w n-wymiarach $Ax^* = b$ otrzymano $\hat{x}$ przybliżenie rozwiązania dla którego zachodzi oszacowanie $\|\hat{x} - x^*\| \leq 10^{-16}$w pewnej normie w $\mathbb{R}^n$. Czy zawsze prawdziwe jest wtedy oszacowanie w normie drugiej $\|\hat{x} - x^*\|_2 \leq 10^{-16}$ jeśli:

(a) $n = 3$ ale nic nie wiemy o normie $\|\cdot\|$ (poza tym, że to norma w R^n)

(b) $n = 100$ a jest to norma maximum tzn. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.

(c) $n = 100$ a jest to norma pierwsza tzn. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$.

Zadanie 7 Znajdź możliwe duże $c > 0$ i możliwie małe $C > 0$, być może zależne od k, że dla normy wektorowej w $\mathbb{R}^k$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^k j^{-1}|x_j|^2}$ zachodzi

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k \qquad c\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|_2$$

Stałe c, C nazywamy stałymi równoważności między normą drugą a normą $\|\cdot\|$.

Zadanie 8 Znajdź oszacowania (postaci $O(n^p)$ dla $p = 0, 1, 2, 3$ z możliwie małym p niezależnym od Q) współczynnika uwarunkowania dla dowolnej macierzy ortogonalnej Q $n \times n$ (tzn. $Q^{-1} = Q^T$) w normach: drugiej, maximum i pierwszej. (indukowanych)

Zadanie 9 Niech $R_1 = (r_{ij})$ macierz górnotrójkątna $n \times n$ taka że $r_{ij} = 1$ $j \geq i$ czyli macierz górnotrójkątna ze wszystkimi elementami na diagonali i nad-diagonalą równymi jeden, a $R_2 = R_1 - 2 * I$ też górnotrójkątna ale z jedynkami nad-diagonalą ale minus jeden na diagonali. Policz współczynnik uwarunkowania R_k w normie pierwszej. Czy zależy od n? A jeśli tak to jak?

Zadanie 10 Pokaż że dla $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_2 = \sup_{y \neq 0} \frac{x^T y}{\|y\|_2}, \qquad \|x\|_1 = \sup_{y \neq 0} \frac{x^T y}{\|y\|_\infty}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{y \neq 0} \frac{x^T y}{\|y\|_1}$$

czy ogólniej (trochę trudniejsze) że $\|x\|_q = \sup_{y \neq 0} \frac{x^T y}{\|y\|_p}$ dla dowolnych $p, q \geq 1$ takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Zadanie 11 W wyniku 1 kroku metody Householdera dla macierzy A otrzymano macierz postaci

$$H_1 * A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

dla H_1 macierzy Householdera z wektorem Householdera $w_1 = (1; 0; 1)^T$.

(a) Wyznacz wektor Householdera H_2 taki, że $H_2 H_1 A = R$ macierz górnotrójkątna

(b) Policz A.

(c) Policz macierz R.

(d) Wyznacz pierwszą kolumnę macierzy A^{-1}.

Zadanie 12 Rozpatrzmy macierz zapisaną w formie blokowej $A = \begin{pmatrix} H & \vec{b} \\ \vec{b}^T & a \end{pmatrix}$, gdzie H macierz Householdera $m \times m$ dla danego wektora Householdera $\vec{x} \neq 0$ (zakładamy że H nie jest utworzona - znamy tylko wektor Householdera), $\vec{b}$ wektor wymiaru m i a skalar.

(a) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu równań liniowych $Ay = f$ możliwie niskim kosztem przy założeniu, że A nieosobliwa. Oszacuj ten koszt w terminach $O(n^p)$ dla $p = 1, 2, 3, \ldots$.

(b) Podaj możliwy do sprawdzenia warunek na a, aby A była nieosobliwa (dla zadanych $\vec{b}$ i $\vec{x}$)

Zadanie 13 Dla danych m różnych punktów (x_k, y_k) określamy krzywą $y - a * x^2 - b = 0$ (a, b, parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^{m} |y_k - a * x_k^2 - b|^2 = \min_{c,d} \sum_{k=1}^{m} |y_k - c * x_k^2 - d|^2$$

Sformułuj zadanie znalezienia parametrów takiej krzywej jako liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) dla danych m punktów. Określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to zadania miało jednoznaczne rozwiązanie dla $m \geq 0$. Wyznacz koszt rozwiązania tego LZNK zadania przy pomocy algorytmu Householdera względem m tzn. jako $C_H m^p + O(m^{p-1})$ dla C_H stałej dodatniej i p wykładnika naturalnego.

Zadanie 14 Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

(a) znajdź wektory i wartości własne (wektory o normie drugiej jeden),

(b) czy ciąg wektorów (o normie drugiej jeden) generowany przez metodę potęgową zbiegnie dla $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} * (1, 1)^T$ - ewentualnie czy istnieje podciąg zbieżny w tym ciągu? Jeśli tak, to policz odpowiednie granice.

(c) określ czy ciąg iteracji parzystych x_{2k} (o unormowanych w normie drugiej) dla metody odwrotnej potęgowej z parametrami $a_1 = 0$ i $a_2 = 10$ zbiegnie dla $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} * (1, 1)^T$. Określ granice ilorazów Reynoldsa dla $\{x_k\}_k$ i wyjściowej macierzy A o ile zachodzi zbieżność.

Zadanie 15 Wykonaj jeden krok czystej metody QR dla zadania własnego dla macierzy z zadania 14. Określ czy ciąg macierzy generowanych czystą metodą QR zbiegnie do macierzy diagonalnej - jeśli tak to określ elementy diagonali tej macierzy (kolejność nieważna).