Równania nieliniowe

Zadanie 1 Pokaż, że równanie

$$x^* - 0.7 * \sin(x^*) = -23$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie i że następująca metoda iteracyjna

$$x_n = 0.7 * \sin(x_{n-1}) - 23$$

zbiegnie dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ do rozwiązania tego równania.

Oszacuj możliwie dokładnie błąd $|x_9 - x^*|$ dla $x_0 = -23$.

Zadanie 2 Dla równania

$$f(x) = 5 - \exp(x) = 0.$$

Pokaż, że

- Istnieje dokładnie jedno rozwiązanie x^* tego równania.
- udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ metoda Newtona zbiegnie do x^*.
- Zaproponuj implementacje jednego kroku metody Newtona o możliwie niskim koszcie dla tej metody (w pseudokodzie, C/C++ lub octavie).

Zadanie 3 Do rozwiązania przybliżonego dwóch równań:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x+2), \\ g(x) &= (x+2)^5, \end{aligned}$$

których rozwiązaniem jest $x^* = -2$ zastosowano metodę Newtona.

Czy w obu przypadkach metoda będzie zbieżna lokalnie (dla x_0 przybliżenia startowego dostatecznie bliskiego x^*). Jeśli tak to określ wykładnik zbieżności w obu przypadkach.

Zadanie 4 Do rozwiązania zadania

$$f(x^*) = 0$$

z $f(x) = \exp(x) - a$ dla ustalonego $a \in (1, 4)$ zastosowano metodę iteracyjną, która w 9-tej iteracji zwróciła $x_9 > 0$ takie że mamy $|f(x_9)| = 1e{-}7$. Czy na tej podstawie możemy stwierdzić, że $|x_9 - x^*| \leq 1e - 6$? Uzasadnić.

WSK: Można skorzystać z twierdzenia o wartości średniej i tego że $f(x^*) = 0$.

Zadanie 5 Dla układu równań $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ i $g(x, y) = x + 2y$ policz pierwszą iterację metody Newtona z $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Czy metoda Newtona jest w przypadku tego układu zbieżna lokalnie?