Interpolacja wielomianowa, funkcje sklejane (splajny)

Zadanie 1 Dla funkcji $f(x) = x^7 - 7 * x$ znajdź w wielomian możliwie niskiego stopnia interpolujący tę funkcję w węzłach o krotności dwa $\{-1, 0, 1\}$ za pomocą algorytmu różnic dzielonych, tzn. $w(x_j) = f(x_j)$ i $w'(x_j) = f'(x_j)$ dla x_j jednego z trzech węzłów.

Zadanie 2 Dla funkcji $f(x) = x^4 - 7 * x$ znajdź wielomian p stopnie nie większego od trzech taki, że

$$\|f - p\|_{\infty,[-1,3]} = \inf_{s \in P_3} \|f - s\|_{\infty,[-1,3]}$$

czy jest on wyznaczony jednoznacznie? Podaj ile wynosi $\|f - p\|_{\infty,[-1,3]}$. Tu P_3 wielomiany stopnia ≤ 3.

Zadanie 3 Pokaż, że dla różnych $n+1$ punktów $\{x_k\}_{k=0}^n$ prawdziwy jest wzór na różnicę dzieloną dla funkcji f określonej na tych punktach:

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{i \neq j}(x_i - x_j)}$$

Zadanie 4 Pokaż że dla dwóch różnych punktów x_0, x_1 i funkcji klasy C^1 prawdziwy jest wzór:

$$f[x_0, x_1] = \int_0^1 f'((1 - s)x_0 + sx_1)\, ds$$

Zadanie 5 (trudne) Pokaż, że dla różnych $n + 1$ punktów $\{x_k\}_{k=0}^n$ prawdziwy jest wzór całkowy Hermite'a-Genocchiego na różnicę dzieloną dla funkcji f określonej na tych punktach:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \int_{S_n} f^{(n)}(s_0 x_0 + s_1 x_1 + \ldots s_n x_n)\, ds$$

gdzie S_n sympleks jednostkowy w $n + 1$ wymiarach tzn.

$$S_n = \{u = (s_0, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : s_i \geq 0,\ \sum_{k=0}^{n} s_i = 1\}.$$

Wsk: Poprzednie zadanie + indukcja korzystająca z przemienności węzłów w różnicy dzielonej tzn. $f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}] = f[x_1, \ldots, x_n]$. Tu $(i_0, \ldots, i_n)$ permutacja zbioru $\{0, \ldots, n\}$. Jeśli Państwo sami tego nie potraficie udowodnić, to rozwiązanie można znaleźć w książce Kincaid, Cheney - Analiza numeryczna, WNT.

Zadanie 6 Na odcinku $[0, 10]$ mamy węzły równo-odległe: $\{x_k\}_{k=0}^N$ z $x_k = k * h$ dla $h = \frac{10}{N}$. Dla danej funkcji $f(x) = \sin(4 * x)$ definiujemy funkcję ciągłą $s \in C([a, b])$ taką, że na każdym pod-odcinku (x_k, x_{k+1}) ta funkcja s jest wielomianem stopnia co najwyżej dwa i spełnia warunki interpolacyjne:

$$\begin{aligned} s(x_k) &= f(x_k) \qquad k = 0, \ldots, N \\ s\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) &= f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \qquad k = 0, \ldots, N - 1. \end{aligned}$$

(a) Czy taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie?

(b) Wyznacz możliwie małą stałą $C > 0$ niezależną od h taką, że

$$\|f - s\|_{\infty,[0,10]} \leq C\, h^3.$$

Zadanie 7 Na odcinku $[a, b]$ mamy zadane węzły : $a = x_0 < \ldots < x_N = b$. Niech s splajn kubiczny na tym podziale odcinka (czyli funkcja w $C^2([a, b])$ na pod-odcinkach będąca wielomianem kubicznym) i $f \in C^2([a, b])$ taka, że

$$f'(a) = f'(b) = f(x_k) = 0 \qquad k = 0, \ldots, N.$$

Pokaż, że

$$\int_a^b f^{(2)} s^{(2)}\, dx = 0.$$

Zadanie 8 Dla danych różnych węzłów $\{x_k\}_{k=0}^n \subset [a, b]$ niech $\{l_k\}_{k=0}^n$ będzie bazą Lagrange' $\mathcal{P}_n$ a dla tych węzłów, i niech $L_n f$ wielomian interpolujący daną funkcję ciągłą $f \in C([a, b])$ w tych węzłach. Pokaż oszacowania

- normy operatora interpolacji

$$\|L_n f\|_{\infty,[a,b]} \leq (\sum_{k=0}^{N} \|l_k\|_{\infty,[a,b]}) \|f\|_{\infty,[a,b]}.$$

- dla dowolnego $w \in P_n$

$$\|f - L_n f\|_{\infty,[a,b]} \leq (1 + \sum_{k=0}^{N} \|l_k\|_{\infty,[a,b]}) \|f - w\|_{\infty,[a,b]}$$

dla P_n przestrzeni wielomianów stopnie nie większego od n.

Zadanie 9 Na odcinku $[a, b]$ mamy zadane węzły : $a = x_0 < \ldots < x_N = b$. Niech V przestrzeń splajnów kubicznych okresowych na tym podziale odcinka czyli przestrzeń funkcji $s \in C^2([a, b])$ na pod-odcinkach będących wielomianami kubicznymi takie, że

$$s^{(r)}(a) = s^{(r)}(b) \quad r = 0, 1, 2.$$

Wyznacz wymiar przestrzeni V.

Zadanie 10 Znajdź wzory na funkcję B klasy $C^2(R)$ taką, że B jest wielomianem stopnia nie większego od trzech na każdym odcinku $[k, k + 1)$ dla k całkowitego, $B(x) = 0$ dla $x \in (-\infty, -2] \cap [2, \infty)$, $B(0) = 4$ i $B(-1) = B(1) = 1$. Czy funkcja jest wyznaczona jednoznacznie? **Wsk:** Funkcja jest parzysta i może pomóc interpolacja Hermite'a na dwóch węzłach. (rozwiązanie tego zadania było na ćwiczeniach).

Zadanie 11 Na odcinku $[a, b]$ mamy zadane węzły równoodległe: $a = x_0 < \ldots < x_N = b$ z $x_k = a + k * h$ i $h = (b - a)/N$. Dodajemy dwa węzły poza odcinkiem $x_{-1} = a - h$ i $x_{N+1} = b + h$. Wprowadzamy $B_j(x) = B((x - x_j)/h)$ dla B z poprzedniego zadania. Pokaż, że $\{B_j\}_{j=-1,0,1,\ldots,N,N+1}$ tworzą bazę splajnów kubicznych obciętych do $[a, b]$.

Zadanie 12 (trudne) Rozpatrzmy funkcję f i s jej splajn kubiczny naturalny interpolacyjny dla zadanego podziału $[a,b]$: $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Niech $\hat{s}$ splajn interpolacyjny kubiczny naturalny dla $\hat{f}$ takiego, że w węzłach $|f(x_k) - \hat{f}(x_k)| \leq \delta$. Oszacuj $\|s - \hat{s}\|_\infty$.

Wsk: Można się przyjrzeć dowodowi oszacowania błędu dla splajny kubicznego interpolacyjnego naturalnego, por. Jankowscy Metody Numeryczne.

Zadanie 13 Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 8^{-k}\cos(2^k x)$. Rozpatrzmy obcięcie tego szeregu: $f_M(x) = \sum_{k=0}^{M} 8^{-k}\cos(2^k x)$. Niech $s_{M,N}$ splajn kubiczny interpolacyjny naturalny na podziale równomiernym odcinka $[0,1]$ tzn. $x_k = k * h$ dla $h = 1/N$ taki, że $f_M(x_k) = s_{M,N}(x_k)$.

- Dla zadanego δ wyznacz najmniejsze $M = M(\delta)$ takie, aby $|f_M(x) - f(x)| \leq \delta$ dla $x \in [0,1]$.
- Oszacuj $|f^{(2)}(x)|$ dla $x \in [0,1]$.
- Dla zadanego ϵ wyznacz N i M takie, że

$$\|f - s_{M,N}\|_{\infty,[0,1]} \leq \epsilon.$$

WSK: Przy rozwiązywaniu ostatniego punktu można np. skorzystać z punktów poprzednich, oszacowania błędu interpolacji splajnami kubicznymi z wykładu i z poprzedniego zadania, ewentualnie inaczej i w sumie dużo prościej oszacować normy $f - f_M$ i $f_M - s_{M,N}$ (jak?).

Kwadratury

Zadanie 1 Znajdź kwadraturę maksymalnego rzędu dla $I(f) = \int_a^b f(x)(x - \frac{a+b}{2})^2 dx$ postaci

$$Qf = Af(a) + Bf(b) + Cf(c)$$

dla A, B, C współczynników i c punktu w (a,b).

Podaj rząd tej kwadratury i oszacuj błąd $|Q(f) - I(f)|$ dla $f \in C^3([a,b])$ z $|f^{(3)}(x)| \leq M$ dla $x \in [a,b]$.

Zadanie 2 Szukamy kwadratury na $n+1$ punktach o maksymalnym rzędzie dla $I(f) = \int_a^b f\,dt$ postaci:

$$Q_n f = A_1 f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

dla $x_k \in (a,b]$.

Wyznacz jaki taka kwadratura ma rząd i czy węzły x_k wyznaczone są jednoznacznie.

Policz węzły i współczynniki $Q_2 f$ tzn. podaj taką kwadraturę dla $n = 2$.

Zadanie 3 Pokaż, że jeśli waga jest symetryczna względem środka odcinka tzn. $\rho(x + \frac{a+b}{2}) = \rho(-x + \frac{a+b}{2})$ to węzły kwadratury Gaussa dla $\int_a^b f(t)\rho(t)\,dt$ są też symetryczne względem $\frac{a+b}{2}$.

Znajdź choć jeden węzeł kwadratury Gaussa opartej na 7 punktach dla wagi $\rho(x) = (1 + x^2) * \cos(x)$ na $[-1,1]$.

Zadanie 4 Podaj najmniejsze N takie, że błąd pomiędzy złożoną kwadraturą prostokątów (równomierny podział odcinka) $P_N f$ na $[-100, 100]$ a $\int_{-100}^{100} f\,dt$ dla $f(x) = \sin(x)$ był mniejszy od 10^{-9}.

Zadanie 5 Oznaczenia

$$F_M^r = \{f \in C^{r+1}([a,b]) : \max_{x\in[a,b]} |f^{(r+1)}(x)| \leq M\}$$

oraz

$$S(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Dla kwadratur interpolacyjnych opartych na 2 węzłach znaleźć węzły i postać kwadratury interpolacyjnej która minimalizuje błąd na klasie F_M^1, tzn. taką $Q^* \in Kw_2$ dla Kw_2 zbioru kwadratur interpolacyjnych na 2 punktach dla $S(f)$, że

$$\min_{Q\in Kw_2} \max_{f\in F_M^1} |S(f) - Q(f)| \quad = \quad \max_{f\in F_M^1} |S(f) - Q^*(f)|.$$

W wersji prostszej, która mogła być/będzie na ćwiczeniach szukamy kwadratury interpolacyjnej minimalizującej błąd w tej klasie z dwoma węzłami symetrycznymi względem środka odcinka $[a, b]$, czy w kolejnej wersji z jednym ustalonym węzłem np. punktem b.

Zadanie 6 Pokaż, że jeśli G_{n+1} jest kwadraturą Gaussa na $n+1$ różnych punktach w $\{x_k\}_{k=0}^n$ w (a, b) dla $I(f) = \int_a^b f\,\rho\,dx$ (ρ waga) to

$$G_{n+1}f = \int_a^b p_{2n+2,f}(x)\,dx$$

gdzie $p_{2n+2,f}$ jest wielomianem Hermite'a f dla węzłów $\{x_k\}_{k=0}^n$ z podwojoną krotnością dwa tzn. $p \in P_{2n+2}$ i $f^{(k)}(x_j) = p_{2n+2,f}^{(k)}(x_j)$ dla $k = 0, 1$ i $j = 0, \ldots, n$.

Korzystają z wzoru na błąd interpolacji Hermite'a dla podwójnych węzłów:

$$f(t) - p_{2n+2,f}(t) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\Pi_{j=0}^n (t - x_j)^2$$

dla pewnego η zależnego w ogólności od t, (dowód to kolejne zadanie) pokaż, że istnieje $\xi \in [a, b]$ takie, że

$$I(f) - G_{n+1}f = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \Pi_{j=0}^n (x - x_j)^2 \rho\,dx = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \|P_{n+1}\|_{L_\rho^2(a,b)}^2$$

o ile $f \in C^{2n+2}$. Tu $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + \ldots$ to $n+1$ wielomian ortogonalny w $L_\rho^2(a, b)$.

Można powoływać się na wyniki z wykładu czy z ćwiczeń o ile zostały na tych ćwiczeniach udowodnione i wtedy należy te wyniki z ćwiczeń precyzyjnie sformułować.