Układy równań liniowych, LZNK, normy macierzy, zadanie własne.

Zadanie 1 Mamy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ i A macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko w ostatniej kolumnie i na 3 głównych diagonalach tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & d_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & d_{n-2} \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa (rozkładu LU) bez wybory elementu głównego możliwie niskim koszcie względem n. Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej C i p naturalnego).

Zadanie 2 Dla danych m różnych punktów (x_k, y_k) określamy krzywą $y - a * x^2 - b = 0$ (a, b, parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^{m} |y_k - a * x_k^2 - b|^2 = \min_{c,d} \sum_{k=1}^{m} |y_k - c * x_k^2 - d|^2$$

Sformułuj zadanie znalezienia parametrów takiej krzywej jako liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) dla danych m punktów. Określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to zadania miało jednoznaczne rozwiązanie dla $m \geq 0$. Wyznacz koszt rozwiązania tego LZNK zadania przy pomocy algorytmu Householdera względem m tzn. jako $C_H m^p + O(m^{p-1})$ dla C_H stałej dodatniej i p wykładnika naturalnego.

Zadanie 3 Dla macierzy A wymiaru 10×10 z Zadania 1 dla $a_k = d_k = -b_k = -c_k = 1$ dla wszystkich odpowiednich k, oblicz indukowaną normę maksimum i normę pierwszą tzn. $\|A\|_\infty$ i $\|A\|_1$ i wyznacz takie dwa wektory x_1 i x_2, że $\|A\|_\infty = \|Ax_1\|_\infty$ i $\|A\|_1 = \|Ax_2\|_1$. Czy wektory x_k są wyznaczone w obu przypadkach jednoznacznie (z dokładnością do mnożenia przez -1)?

Zadanie 4 Znajdź możliwe duże $c > 0$ i możliwie małe $C > 0$, być może zależne od k, że dla normy wektorowej w $\mathbb{R}^k$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} j^{-1} |x_j|^2}$ zachodzi

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k \qquad c\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|_2$$

Stałe c, C nazywamy stałymi równoważności między normą drugą a normą $\| \cdot \|$.

Zadanie 5 Rozpatrzmy macierz zapisaną w formie blokowej $A = \begin{pmatrix} H & \vec{b} \\ \vec{b}^T & a \end{pmatrix}$, gdzie H macierz Householdera $m \times m$ dla danego wektora Householdera $\vec{x} \neq 0$ (zakładamy że H nie jest utworzona - znamy tylko wektor Householdera), $\vec{b}$ wektor wymiaru m i a skalar.

(a) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu równań liniowych $Ay = f$ możliwie niskim kosztem przy założeniu, że A nieosobliwa. Oszacuj ten koszt w terminach $O(n^p)$ dla $p = 1, 2, 3, \ldots$.

(b) Podaj możliwy do sprawdzenia warunek na a, aby A była nieosobliwa (dla zadanych $\vec{b}$ i $\vec{x}$)

Zadanie 6 Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

(a) znajdź wektory i wartości własne

(b) określ czy ciąg iteracji parzystych x_{2k} dla metody odwrotnej potęgowej z parametrami $a = 0$ i $a_2 = 10$ zbiegnie dla $x_0 = (1, 1)^T$. Określ granice ilorazów Reynoldsa dla wyjściowej macierzy Ao ile zachodzi zbieżność tzn. $r_{2k} = x_{2k}^T A x_{2k} / \|x_{2k}\|_2^2$.