Układy równań liniowych, LZNK, normy macierzy.

Zadanie 1 Mamy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ i A macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko w ostatniej kolumnie i na 3 głównych diagonalach tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & d_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & d_{n-2} \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa (rozkładu LU) bez wybory elementu głównego możliwie niskim koszcie względem n. Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej C i p naturalnego).

Zadanie 2 Dla danych m różnych punktów (x_k, y_k) określamy krzywą $y - a * x^2 - b = 0$ (a, b, parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^{m} |y_k - a * x_k^2 - b|^2 = \min_{c,d} \sum_{k=1}^{m} |y_k - c * x_k^2 - d|^2$$

Sformułuj zadanie znalezienia parametrów takiej krzywej jako liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) dla danych m punktów. Określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to zadania miało jednoznaczne rozwiązanie dla $m \geq 0$. Wyznacz koszt rozwiązania tego LZNK zadania przy pomocy algorytmu Householdera względem m tzn. jako $C_H m^p + O(m^{p-1})$ dla C_H stałej dodatniej i p wykładnika naturalnego.

Zadanie 3 Dla macierzy A wymiaru 10×10 z Zadania 1 dla $a_k = d_k = -b_k = -c_k = 1$ dla wszystkich odpowiednich k, oblicz indukowaną normę maksimum i normę pierwszą tzn. $\|A\|_\infty$ i $\|A\|_1$ i wyznacz takie dwa wektory x_1 i x_2, że $\|A\|_\infty = \|Ax_1\|_\infty$ i $\|A\|_1 = \|Ax_2\|_1$. Czy wektory x_k są wyznaczone w obu przypadkach jednoznacznie (z dokładnością do mnożenia przez -1)?

Zadanie 4 Znajdź możliwe duże $c > 0$ i możliwie małe $C > 0$, być może zależne od k, że dla normy wektorowej w $\mathbb{R}^k$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} j^{-1}|x_j|^2}$ zachodzi

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k \qquad c\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|_2$$

Stałe c, C nazywamy stałymi równoważności między normą drugą a normą $\|\cdot\|$.

Zadanie 5 Rozpatrzmy macierz zapisaną w formie blokowej $A = \begin{pmatrix} H & \vec{b} \\ \vec{b}^T & a \end{pmatrix}$, gdzie H macierz Householdera $m \times m$ dla danego wektora Householdera $\vec{x} \neq 0$ (zakładamy że H nie jest utworzona - znamy tylko wektor Householdera), $\vec{b}$ wektor wymiaru m i a skalar.

(a) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu równań liniowych $Ay = f$ możliwie niskim kosztem przy założeniu, że A nieosobliwa. Oszacuj ten koszt w terminach $O(n^p)$ dla $p = 1, 2, 3, \ldots$.

(b) Podaj możliwy do sprawdzenia warunek na a, aby A była nieosobliwa (dla zadanych $\vec{b}$ i $\vec{x}$)

Zadanie 6 Niech A macierz symetryczna dodatnio określona taka, że jej wartości włąsne leżą w $[0.5, 1]$. Rozpatrzmy metodę iteracyjnę:

$$x^{(n+1)} = y^{(n)} - 0.4 * (Ay^{(n)} - b)$$

gdzie $y^{(n)} = x^{(n)} - 0.3 * (Ax^{(n)} - b)$. Czy ta metoda jest zbieżna do rzowiążania $Ax = b$, jeśli tak oszacuj szybkość zbieżności w normie drugiej.

Zadanie 7 Niech $A = A^T > 0$ taka że jej wartości własne są w przedziale $[c, d]$. Znajdź τ takie aby metoda Richardsona: $x^{k+1} = x^k - \tau(Ax^k - b)$ była zbieżna do x^* rozwiązania $Ax^* = b$. Oszacuj szybkość zbieżności w normie $\|\cdot\|_2$ oraz w normie energetycznej $\|x\|_A = \sqrt{x^T Ax}$. Wyznacz wartości parametru dla których szybkość zbieżności w odpowiednich normach największa.

Zadanie 8 Niech $A = A^T > 0$ taka że jej wartości własne to $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Chcemy rozwiązać układ $Ax^* = b$ przy pomocy metody Richardsona i znamy x^0 takie że $x^0 - x^*$ jest ortogonalne do wektorów własnych dla pierwszych czterech wartości własnych. Znajdź τ takie aby metoda Richardsona: $x^{k+1} = x^k - \tau(Ax^k - b)$ była zbieżna do x^*. Oszacuj szybkość zbieżności w normie $\|\cdot\|_2$. Wyznacz wartości parametru dla których szybkość zbieżności w normie drugiej będzie największa.

Zadanie 9 Udowodnij że dla macierzy $A = (a_{ij})_{i,j}$ silnie diagonalnie dominującej ($\rho|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ z $0 < \rho < 1$) metoda Gaussa-Seidla rozwiązywania równania $Ax = b$:

$$x_i^{(n+1)} = a_{ii}^{-1}(-\sum_{j=1}^{k-1} a_{ij}x_j^{(n+1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}x_j^{(n)} + b_i) \quad i = 1, \ldots, n$$

jest zbieżna w normie $\|\cdot\|_\infty$.

Zadanie 10 Niech A nieosobliwa. Do rozwiązania układu $A^T Ax = b$ zastosowano następującą metodę iteracyjną:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k \qquad r^k = b - A^T Ax^k$$

dla α_k minimalizującego funkcję $g(\tau) = \|A^T A(x^k + \tau r^k) - b\|_2^2$. Oblicz wzór na α_k oraz oszacuj $\|A^T Ax^k - b\|_2 / \|A^T Ax^0 - b\|_2$. Czy metoda jest zbieżna?

Zadanie 11 Udowodnij, że jeśli A ma wartości własne o częściach rzeczywistych większych od zero to istnieją dodatnie wartości parametru τ dla których metoda Richardsona rozwiązywania $Ax = b$ jest zbieżna. Oszacuj zbiór tych wartości τ dla A macierzy o normie macierzowej drugiej równej jeden.