Kwadratury i równania nieliniowe

Proszę rozwiązać w formie pisemnej każde zadanie oznaczone jako pisemne na **piątek 20 maja 2011**. Uwaga - zadania są też na kolejnych stronach.

Zadanie 1 **(pisemnie)** Znajdź kwadraturę maksymalnego rzędu dla $I(f) = \int_a^b f(x)(x - \frac{a+b}{2})^2 dx$ postaci

$$Qf = Af(a) + Bf(b) + Cf(c)$$

dla A, B, C współczynników i c punktu w (a, b).

Podaj rząd tej kwadratury i oszacuj błąd $|Q(f) - I(f)|$ dla $f \in C^3([a, b])$ z $|f^{(3)}(x)| \leq M$ dla $x \in [a, b]$.

Zadanie 2 Szukamy kwadratury na $n+1$ punktach o maksymalnym rzędzie dla $I(f) = \int_a^b f\, dt$ postaci:

$$Q_n f = A_1 f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

dla $x_k \in (a, b]$.

Wyznacz jaki taka kwadratura ma rząd i czy węzły x_k wyznaczone są jednoznacznie.

Policz węzły i współczynniki $Q_2 f$ tzn. podaj taką kwadraturę dla $n = 2$.

Zadanie 3 Pokaż, że jeśli waga jest symetryczna względem środka odcinka tzn. $\rho(x + \frac{a+b}{2}) = \rho(-x + \frac{a+b}{2})$ to węzły kwadratury Gaussa dla $\int_a^b f(t)\rho(t)\, dt$ są też symetryczne względem $\frac{a+b}{2}$.

Znajdź choć jeden węzeł kwadratury Gaussa opartej na 7 punktach dla wagi $\rho(x) = (1 + x^2) * \cos(x)$ na $[-1, 1]$.

Zadanie 4 Podaj najmniejsze N takie, że błąd pomiędzy złożoną kwadraturą prostokątów (równomierny podział odcinka) $P_N f$ na $[-100, 100]$ a $\int_{-100}^{100} f\, dt$ dla $f(x) = \sin(x)$ był mniejszy od 10^{-9}.

Zadanie 5 Oznaczenia

$$F_M^r = \{f \in C^{r+1}([a, b]) : \max_{x \in [a,b]} |f^{(r+1)}(x)| \leq M\}$$

oraz

$$S(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Dla kwadratur interpolacyjnych opartych na 2 węzłach znaleźć węzły i postać kwadratury interpolacyjnej która minimalizuje błąd na klasie F_M^1, tzn. taką $Q^* \in Kw_2$ dla Kw_2 zbioru kwadratur interpolacyjnych na 2 punktach dla $S(f)$, że

$$\min_{Q \in Kw_2} \max_{f \in F_M^1} |S(f) - Q(f)| \quad = \quad |S(f) - Q^*(f)|.$$

W wersji prostszej, która mogła być/będzie na ćwiczeniach szukamy kwadratury interpolacyjnej minimalizującej błąd w tej klasie z dwoma węzłami symetrycznymi względem środka odcinka $[a, b]$, czy w kolejnej wersji z jednym ustalonym węzłem np. punktem b.

Zadanie 6 Pokaż, że jeśli G_{n+1} jest kwadraturą Gaussa na $n+1$ różnych punktach w $\{x_k\}_{k=0}^n$ w (a,b) dla $I(f) = \int_a^b f\,\rho\,dx$ (ρ waga) to

$$G_{n+1}f = \int_a^b p_{2n+2,f}(x)\,dx$$

gdzie $p_{2n+2,f}$ jest wielomianem Hermite'a f dla węzłów $\{x_k\}_{k=0}^n$ z podwojoną krotnością dwa tzn. $p \in P_{2n+2}$ i $f^{(k)}(x_j) = p_{2n+2,f}^{(k)}(x_j)$ dla $k = 0, 1$ i $j = 0, \ldots, n$.

Korzystają z wzoru na błąd interpolacji Hermite'a dla podwójnych węzłów:

$$f(t) - p_{2n+2,f}(t) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\Pi_{j=0}^n (t - x_j)^2$$

dla pewnego η zależnego w ogólności od t, (dowód to kolejne zadanie) pokaż, że istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że

$$I(f) - G_{n+1}f = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \Pi_{j=0}^n (x - x_j)^2 \rho\,dx = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\|P_{n+1}\|_{L^2_\rho(a,b)}^2$$

o ile $f \in C^{2n+2}$. Tu $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + \ldots$ to $n+1$ wielomian ortogonalny w $L^2_\rho(a,b)$.

Zadanie 7 Pokaż, że równanie

$$x^* - 0.7 * \sin(x^*) = -23$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie i że następująca metoda iteracyjna

$$x_n = 0.7 * \sin(x_{n-1}) + 10$$

zbiegnie dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ do rozwiązania tego równania.

Oszacuj możliwie dokładnie błąd $|x_9 - x^*|$ dla $x_0 = -23$.

Zadanie 8 Dla równania

$$f(x) = 5 - \exp(x) = 0.$$

Pokaż, że

- Istnieje dokładnie jedno rozwiązanie x^* tego równania.
- udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ metoda Newtona zbiegnie do x^*.
- Zaproponuj implementacje jednego kroku metody Newtona o możliwie niskim koszcie dla tej metody (w pseudokodzie, C/C++ lub octavie).

Zadanie 9 **(pisemnie)** Do rozwiązania przybliżonego dwóch równań:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x+2), \\ g(x) &= (x+2)^5, \end{aligned}$$

których rozwiązaniem jest $x^* = -2$ zastosowano metodę Newtona.

Czy w obu przypadkach metoda będzie zbieżna lokalnie (dla x_0 przybliżenia startowego dostatecznie bliskiego x^*). Jeśli tak to określ wykładnik zbieżności w obu przypadkach.

Zadanie 10 Do rozwiązania zadania

$$f(x^*) = 0$$

z $f(x) = \exp(x) - a$ dla ustalonego $a \in (1, 4)$ zastosowano metodę iteracyjną, która w 9-tej iteracji zwróciła $x_9 > 0$ takie że mamy $|f(x_9)| = 1e{-}7$. Czy na tej podstawie możemy stwierdzić, że $|x_9 - x^*| \leq 1e - 6$? Uzasadnić.

WSK: Można skorzystać z twierdzenia o wartości średniej i tego że $f(x^*) = 0$.

Można powoływać się na wyniki z wykładu czy z ćwiczeń o ile zostały na tych ćwiczeniach udowodnione i wtedy należy te wyniki z ćwiczeń precyzyjnie sformułować.