Aproksymacja, rozwiązywanie równań nieliniowych, kwadratury

Aproksymacja, wielomiany ortogonalne

Zadanie 1 (dodatkowe) Znajdź wzory na regułę tróczłonową $P_{n+1} = a_n x P_n + b_n P_n + c_n P_{n-1}$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ dla wielomianów ortonormalnych P_n w $(f, g)_{L^2_\rho(a,b)}$. Wielomiany ortonormalne $P_n = \alpha_n x^n + \ldots$ spełniają

$$(P_n, P_m)_{L^2_\rho(a,b)} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \qquad m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Zadanie 2 (dodatkowe) Znajdź wzory na regułę tróczłonową dla wielomianów Czebyszewa na $[a, b]$ tzn dla $\hat{T}_n(x) = T_n((x - \frac{a+b}{2}) * \frac{2}{b-a})$ gdzie $\{T_n\}_{n \geq 0}$ to wielomiany Czebyszewa na $[-1, 1]$ spełniające $T_0 = 1, T_1(t) = t$ i $T_{n+1} + T_n = 2tT_n$.

Zadanie 3 (dodatkowe) Rozpatrzmy $g(x) = \sin(x)$ i zadania znalezienia wielomianów najlepszej aproksymacji dla g: $w_1 \in V_1 = P_n$ i $w_2 \in V_2 = P_{n-1}$ dla $n > 0$ w normie:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos(x)) |f(x)|^2 \, dx}.$$

(a) Znajdź w_1, w_2 dla $n = 1$.

(b) Dla jakich $n > 0$ prawdą jest, że $w_1 = w_2$? Uzasadnij odpowiedź.

WSK: to norma typu L^2 więc generowana przez iloczyn skalarny typu L^2 z odpowiednią wagą a podprzestrzenie są przestrzeniami wielomianów. Każda z metod zadziała ale żeby sobie uprościć rachunki można zauważyć, że w iloczynie skalarnym generującym tę normę $(u, v) = 0$ o ile $u * v$ jest funkcją nieparzystą np. $(\sin(x)x^k)$ lub (x^k, x^j) dla k parzystego a j nieparzystego.

Zadanie 4 Dla funkcji f wiemy, że $\int_a^b f^2 dx = 2019$ i znamy ciąg wielomianów ortonormalnych tzn. w_i, $i \geq 0$ takich, że stopień w_i jest i, $\int_a^b w_i w_j = 0$ dla $i \neq j$ i $\int_a^b |w_i|^2 = 1$. Dodatkowo znamy $\gamma_i = \int_a^b f w_i$.

- wyraź wzór na błąd $\|f - p_n\|^2$ jako funkcję $(\gamma_k)_k$ dla $\|g\| = \int_a^b |g|^2$ i p_n elementu najlepszej aproksymacji dla f w przestrzeni wielomianóœ stopnie nie większego od n
- napisz w pseudokodzie algorym znalezienia takiego, $n \leq 2019$, że $\|f - p_n\| \leq \epsilon$ albo gdy takie n nie istnieje zwracającego $n = -1$. Algorytm jako input ma tylko funkcję $\gamma(k)$ zwracajacą γ_k dla danego $k \geq 0$.

- czy istnieje funkcja f będąca wielomianem stopnia m taka, że $\|f - p_{2019}\| = 2019$? Podaj wynik w zależności od m. Jeśli tak to znajdź współczynniki tego wielomianu w bazie $(w_0, \ldots, w_m)$.

Zadanie 5 (dodatkowe)

(a) Pokaż, że element najlepszej aproksymacji jednostajnej, czyli w normie $\|\cdot\|_\infty$, w P_n na $[a, b]$ dla dowolnej funkcji ciągłej f interpoluje tę funkcję w $n + 1$ punktach na $[a, b]$.

(b) Czy prawdą jest, że dla danej funkcji f ciągłej na $[a, b]$ zawsze istnieje ciąg węzłów $\{x_k^n\}_{k=0}^n \subset [a, b]$ taki, że ciąg wielomianów stopni nie większych od n: $L_n f$ interpolujących tę funkcję w tych węzłach (tzn. $L_n f(x_k^n) = f(x_k^n)$) zbiega jednostajnie do tej funkcji? Uzasadnij odpowiedź.

WSK: Użyj twierdzenia o alternansie.

Zadanie 6 (dodatkowe) Dla zbioru $K = \{-1, 0, 1\}$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty,K} = \max_{x\in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = x^2 - 1.876 * x + \sqrt{17}$.

WSK: Ile punktowy jest alternans dla wielomianu liniowego a ile punktów jest w zbiorze K? (Tw o alternansie jest prawdziwe też dla aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty,K}$ dla K domkniętego i ograniczonego zbioru.)

Zadanie 7 Niech $f(x) = 42x^3 - 2x^2 + 2x - 1$. Znajdź wielomian stopnia ≤ 2 najlepiej przybliżający f w normie supremum na przedziale

- $[-1, 1]$
- $[-7, -5]$
- $[0, 1]$
- $[0, 4]$

Jeśli to zadanie będzie na kartkówce to będzie trzeba wybrać 2 przedziały.
WSK: można skorzystać z własności wielomianów Czebyszewa i ich własności minimalizacyjnych na $[-1, 1]$ i odpowiedniego liniowego przeskalowania

Zadanie 8 Niech $f(x) = 42x^3 - 2x$. Pokaż że $w_1 = w_2$ dla w_n wielomianu najlepszej aproksymacji jednostajnej dla f stopnia $\leq n$ na $[-5, 5]$. Następnie znajdź w_1.

Czy znając w_1 potrafisz znaleźć wielomian liniowy najlepszej aproksymacji jednostajnej dla $g(x) = 21 * x^3 + x - 2$?

Wielomian najlepszej aprosymacji jednostajnej w_n st $\leq n$ dla $f \in C([a, b])$: spełnia: $\|f - w_n\|_{\infty,[a,b]} = \inf_{p\in P_n} \|f - p\|_{\infty,[a,b]} \quad \forall p \in P_n$. Tu P_n przestrzeń wielomaniów stopnia $\leq n$.

WSK: f jest nieparzystą więc można pokazać (jak?) ze wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej w_n stopnia $\leq n$ też będzie funkcją nieparzystą. Zauważ że $g(x) = 0.5 * f(x) + 2x - 2$.

Zadanie 9 (dodatkowe) Dla zbioru $K = [-1, 1]$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty,K} = \max_{x\in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = x^2 - 1.876 * x + \sqrt{17}$. Pokaż że alternans w tym przypadku zawiera końce odcinka.

WSK: Funkcja $f - p$ jest ściśle wypukła dla dowolnego wielomianu liniowego p. Ile punktowy jest alternans dla wielomianu liniowego? Ile ekstremów WEWNĄTRZ odcinka może mieć funkcja $f - p$ dla p wielomianu liniowego?

Zadanie 10 Optymalne węzły interpolacji Lagrange'a to węzły Czebyszewa zdefiniowane jako takie różne $n + 1$ węzłów $\{x_k\}$ z $[a, b]$, że

$$\min_{\{y_k\}} \|\|\Pi_{k=0}^n (x - y_k)\|_{\infty,[a,b]} = \|\Pi_{k=0}^n (x - x_k)\|_{\infty,[a,b]} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n},$$

gdzie minimum brane po wszystkich $n + 1$ różnych węzłach z $[a, b]$.

(a) (dodatkowe) Pokaż, że te węzły to $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k$ dla $\{t_k\} \subset [-1, 1]$ zer $n + 1$ wielomianu Czebyszewa $T_{n+1}(t) = \cos((n + 1)acos(t))$.

(b) Oszacuj błąd $e(n, L) = \|f - L_n f\|_{\infty,[1,L]}$ dla $f(x) = \log(1+x)$ i $L_n f$ wielomianu interpolacyjnego opartego na $n + 1$ węzłach optymalnych Czebyszewa na $[0, L]$. Określ kiedy możemy pokazać korzystając z wzoru na błąd interpolacji, że $\lim_n e(n, L)$ zbiega do zera?

Zadanie 11 (dodatkowe) Dla zbioru $K = [-1, 2]$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty,K} = \max_{x\in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = |x| - x + 4$. Pokaż że alternans w tym przypadku zawiera końce odcinka.

WSK: Gdzie funkcja postaci $|x| + p_1$ dla p_1 wielomianu liniowego może mieć ekstrema?

Zadanie 12 Pokaż że dla dodatniej wagi parzystej ω (tzn. $\omega(-x) = \omega(x)$) wielomian ortogonalny stopnia parzystego w iloczynie skalarnym typu $L^2_\omega(-a, a)$: $(f, g)_{L^2_\omega(-a,a)} := \int_{-a}^{a} \omega f g \, dx$ jest funkcją parzystą.

Zadanie 13 Dla $f(x) = |x - 6|$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,2]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty,[-1,2]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeń wielomianów stopnia $\leq k$.

Zadanie 14 Dla $f(x) = x^2 - 10x + 1$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,2]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty,[-1,2]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeni wielomianów stopnie $\leq k$.

Zadanie 15 Dla $f(x) = \max(0, 2 * x)$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[-1, 2]$ tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,2]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty,[-1,2]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeni wielomianów stopnie $\leq k$.

Zadanie 16 Niech $p_k(x) = x^k + \ldots$ ciąg wielomianów ortogonalnych z iloczynie skalarnym typu $L^2_\rho(-1, 1)$ z wagą parzystą tzn $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\rho(x)\, dx$ z $\rho(x) = \rho(-x)$. Pokaż, że $p_k(0) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy k nieparzyste.

WSK: Można pokazać że zera p_k leżą symetrycznie względem zera.

Metody rozwiązywania równania nieliniowego

Metoda generującej ciąg x_n zbieżny do x^* rozwiązania ma rząd zbieżności (wykładnik zbieżności) równy $p \geq 1$ jeśli istnieje $C \geq 0$ i N takie, że jeśli $n \geq N$ to

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p \qquad p > 1$$

w przypadku $p = 1$ żądamy dodatkowo by $C < 1$ i wtedy mówimy o zbieżności liniowej. Przypadek $p = 2$ określamy jako zbieżność kwadratową a $p = 3$ kubiczną.

Zadanie 17 (dodatkowe)

- Pokaż, że metoda iteracyjna $x_{k+1} = F(x_k)$ spełniająca $F \in C^p$ na otoczeniu x^*, $F(x^*) = x^*$ i $F^{(j)}(x^*) = 0; j = 1, \ldots, p-1$ $(p > 1)$jest zbieżna lokalnie i ma rząd zbieżności p.
- Określ rząd zbieżności metody Newtona korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0$ i $f \in C^\infty$.
- Określ rząd zbieżności metody Newtona korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0 = f''(x^*)$ i $f \in C^\infty$.
- Określ rząd zbieżności metody cięciw $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_0)$ korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0$ i $f \in C^\infty$.
- Określ rząd zbieżności metody Halleya to metoda Newtona zastosowana do
$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}},$$
korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0$ i i $f \in C^\infty$.

Zadanie 18 Aby znaleźć pierwiastek trzeciego stopnia z 5 czyli $x^* = 5^{1/3}$, dla równania $f(x) = x^3 - 5 = 0$ z rozwiązaniem $x^* = 5^{1/3}$ zastosowano metodę Newtona.

- Pokaż, że dla dowolnego $x_0 > 0$ zachodzi $x_k \geq x^*$ dla $k > 0$.
- udowodnij, że dla dowolnego $x_0 > 0$ metoda zbiegnie do x^*.
- Policz granice $\frac{e_{n+1}}{e_n^2}$ (o ile istnieje) dla $e_n = x_n - x^*$.
- Weźmy $x_0 > x^*$ czy wtedy prawdziwe jest oszacowanie $e_{n+1} \leq Le_n$ dla $n \geq 0$ ze stałą $L < 1$?

Zadanie 19 (dodatkowe) Do rozwiązania przybliżonego równań $f(x) = x * \sin(x - 3)$ i $g(x) = (x - 3)^2 \exp(x)$ których rozwiązaniem jest $x^* = 3$ zastosowano metodę Newtona. Czy w obu przypadkach metoda będzie zbieżna lokalnie (dla x_0 przybliżenia startowego dostatecznie bliskiego x^*)? Jeśli tak to określ wykładnik (rząd) zbieżności w obu przypadkach.

Zadanie 20 Pokaż, że równanie $x^* - 0.2 * \sin(x^*) = 6$ ma dokładnie jedno rozwiązanie i że następująca metoda iteracyjna $x_n = 0.2 * \sin(x_{n-1}) + 6$ zbiegnie dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ do rozwiązania tego równania. Oszacuj możliwie dobrze błąd $|x_9 - x^*|$ dla $x_0 = 6$.

Zadanie 21 Do rozwiązania zadania $f(x^*) = 0$ dla $f(x) = \exp(x) - a$ dla ustalonego $a \in (1, 4)$ zastosowano metodę iteracyjną, która w 9-tej iteracji zwróciła $x_9 > 0$ takie że mamy $|f(x_9)| = 1e - 7$. Czy na tej podstawie możemy stwierdzić, że $|x_9 - x^*| \leq 1e - 6$? Uzasadnić.

WSK: Skorzystać z tw. o wartości średniej i tego że $f(x^*) = 0$.

Zadanie 22 (dodatkowe) Rozważamy funkcję

$$f(x) = \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + x - 1.$$

(a) Pokaż, że f ma jedyne miejsce zerowe r w przedziale $(0, 1)$.

(b) Pokaż, że gdy do przybliżonego wyznaczenia r stosujemy metodę Newtona. dla dowolnego punktu startowego $x_0 \in (0, 1)$ otrzymamy ciąg przybliżeń x_n zbieżny do r.

(c) Pokaż, że zbieżność jest dokładnie kwadratowa.

Zadanie 23 Do rozwiązania $f(x) = (x-2)^2 + \exp(x-2) - 2$ zastosowano metodę Newtona.

(a) pokaż że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $x^* \in [2, 3]$ tzn $f(x^*) = 0$.

(b) pokaż że metoda Newtona jest lokalnie zbieżna dla rozwiązania równania $x^* \in [2, 3]$. określ rząd zbieżności (wykładnik zbieżności).

(c) czy dla dowolnego $x_0 > x^*$ metoda Newtona będzie zbieżna? Uzasadnij. WSK: pokaż że wtedy wszystkie iteracje metody Newtona $x_n > x^*$ a potem że $x_n - x^*$ jest ciągiem malejącym czyli zbieżnym (dlaczego?).

Zadanie 24 Jacek i Placek zaimplementowali metodę Newtona i zastosowali ją Jacek do

$$f_1(x) = (x-2)^2 * (\exp(x) + 1)$$

otrzymując ciąg (x_n) a Placek do

$$f_2(y) = y * \sin(2 * y - 4)$$

otrzymując (y_n) w obu przypadkach itercje metody Newtona dla $x_0 = y_0 \approx 2$ zbiegły do rozwiązania $x^* = 2$. Kilka kolejnych iteracji oraz wartości błedu są w poniższej tabelce. Określ czy któryś nie ma błędu w implementacji na bazie tych wyników.

nr iter n	*metoda* x_n	*Jacka dla* f_1 $\lvert x_n - 2\rvert$	*metoda* y_n	*Placka dla* f_2 $\lvert y_n - 2\rvert$
0	$1.800000e+00$	$2.000000e-01$	$1.800000e+00$	$2.000000e-01$
1	$1.909387e+00$	$9.061296e-02$	$2.039527e+00$	$3.952731e-02$
		.....		
10	$1.999837e+00$	$1.633413e-04$	$1.999995e+00$	$4.976425e-06$
11	$1.999918e+00$	$8.166476e-05$	$2.000002e+00$	$1.825667e-06$
12	$1.999959e+00$	$4.083091e-05$	$1.999999e+00$	$6.697784e-07$
13	$1.999980e+00$	$2.041509e-05$	$2.000000e+00$	$2.457190e-07$
14	$1.999990e+00$	$1.020745e-05$	$2.000000e+00$	$9.014612e-08$
15	$1.999995e+00$	$5.103703e-06$	$2.000000e+00$	$3.307159e-08$
16	$1.999997e+00$	$2.551846e-06$	$2.000000e+00$	$1.213286e-08$
17	$1.999999e+00$	$1.275922e-06$	$2.000000e+00$	$4.451142e-09$

Kwadratury

Zadanie 25 Wiedząc, że dla danej dodatniej wagi ω zachodzi:

$$\int_{-1}^{3} x^k \omega \, dx = \begin{cases} 0 & k \; nieparzyste \\ \frac{1}{k+1} & w.p.p. \end{cases} \qquad k = 0, \ldots, 8$$

- znajdź pierwsze cztery wielomiany ortogonalne P_k $k = 0, 1, 2, 3$ w iloczynie skalarnym $(f, g) := \int_{-1}^{3} \omega f g \, dx$.
- znajdź kwadraturę Gaussa obliczania $\int_{-1}^{3} f\omega \, dx$ rzędu cztery.

P_k k-ty wielomian ortogonalny gdy P_k stopnia k i $(P_k, w) = 0$ dla dowolnego w wielomianów st. $< k$.

WSK: W pierwszym podpunkcie można skorzystać z ortogonalizacji Gramma-Schmidta lub reguły tróczłonowej - por. skrypt wykładowcy. W drugim podpunkcie należy skorzystać z pierwszego.

Zadanie 26 Znajdź kwadraturę maksymalnego rzędu opartą o dwa węzły w tym jeden równy zero dla obliczania $\int_{-1}^{3} f\,dx$ tzn $Qf = Af(0) + Bf(\theta)$ dla $\theta \in [-1, 3]$.

Zadanie 27 (dodatkowe) (o ile nie było na ćwiczeniach) Rozpatrzmy kwadraturę $P_{[a,b]}f = (b-a) * f((a+b)/2)$ dla $\int_a^b f\,dt$.

(a) Znajdź jej rząd.

(b) Pokaż oszacowania błędu

$$|\int_a^b f\,dt - P_{[a,b]}f| \leq c_j \|f^{(j)}\|_{\infty,[a,b]}(b-a)^{j+1}$$

dla $f \in C^j([a,b])$ dla $j = 1, 2$. (Tu c_j stałe niezależne od f ani a, b.) Przypadek $j = 2$ jest trudny.

(c) Konstruujemy kwadraturę złożoną prostokątów dla całki $\int_c^d f(x)\,dx$:

$$P_n f := \sum_{k=1}^{N} P_{[x_{k-1},x_k]}f = h\sum_{k=1}^{N} f(x_k - h/2)$$

dla $h = (d-c)/N$ i $x_k = c + k * h$. Pokaż, że

$$e_N = |\int_c^d f\,dt - P_N f| \leq d_j h^j \|f^{(j)}\|_{\infty,[c,d]}$$

dla $j = 1, 2$. (Tu d_j stałe niezależne od f ani N czy h.)

(d) Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} e_N = 0$ dla f dowolnej ciągłej (pochodna może nie istnieć).

Wsk: Trzeci podpunkt wynika z drugiego.