Iteracyjne metody i numeryczne zadanie własne

Zadania na metody iteracyjne rozwiązywania równań liniowych

Zadanie 1 (zadanie kolokwium 2017/18) Dla układu równań liniowych zapisanego blokowo jako

$$\begin{array}{rcrcl} Ax^* & + & B^T y^* & = & b_1 \\ Bx^* & + & y^* & = & b_2 \end{array}$$

z $A = A^T > 0$ wymiaru $n \times n$ i B wymiaru $m \times n$ zastosowano następującą metodę iteracyjną:

$$\begin{array}{rcrcl} Ax_{k+1} & + & B^T y_k & = & b_1 \\ Bx_{k+1} & + & y_{k+1} & = & b_2 \end{array}$$

pokaż że jeśli

$$\|BA^{-1}B^T\|_2 \leq \rho < 1.$$

to metoda zbieżna w normie $\|\cdot\|_2$ dla dowolnych wektorów startowych x_0, y_0.

Zadanie 2 (dodatkowe) (Blokowa metoda Jakobiego) Dla układu równań liniowych zapisanego blokowo jako

$$\begin{array}{rcrcl} A_1 x^* & + & B_1 y^* & = & b_1 \\ B_2 x^* & + & A_2 y^* & = & b_2 \end{array}$$

z A_k, B_k wymiaru $n \times n$ zastosowano następującą metodę iteracyjną:

$$\begin{array}{rcrcl} A_1 x_{n+1} & + & B_1 y_n & = & b_1 \\ B_2 x_n & + & A_2 y_{n+1} & = & b_2 \end{array}$$

pokaż że przy założeniu, że A_k^{-1} odwracalne i dodatkowo zachodzi

$$\max_k \|A_k^{-1} B_k\|_\infty \leq \rho < 1.$$

mamy, że metoda zbieżna w normie $\|\cdot\|_\infty$ dla dowolnych wektorów startowych x_0, y_0 i dodatkowo zachodzi oszacowanie

$$\|(x_k, y_k)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty \leq \rho^k \|(x_0, y_0)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty.$$

Zadanie 3 Niech $A = A^T > 0$ taka że jej wartości własne są w przedziale $[1, 10]$. Znajdź τ takie aby metoda Richardsona: $x^{k+1} = x^k - \tau(Ax^k - b)$ była zbieżna do x^* rozwiązania $Ax^* = b$. Oszacuj szybkość zbieżności w normie $\|\cdot\|_2$. Wyznacz wartości parametru dla których oszacowanie szybkości zbieżności w normie drugiej będzie najlepsze.

Zadanie 4 (dodatkowe) Powtórz poprzednie zadanie ale w normie energetycznej $\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$. Wsk: Pokaż że $\|I - \tau A\|_A = \|I - \tau A\|_2$ korzystając z istnienia $A^{1/2}$ takiej, że $A^{1/2} A^{1/2} = A$.

Zadanie 5 (dodatkowe) Rozpatrzmy układ liniowy $Ax = b$ dla $A = A^T > 0$ i C nieosobliwej takiej że $cond_2(C^TAC) \leq 2$. Stosujemy m. Richardsona z optymalnym parametrem do $C^TACy = C^Tb$ otrzymując ciąg y_k zbieżny do y. Pokaż że przyjmując $x_k = Cy_k$ dostaniemy wzory na x_k wymagające tylko mnożenia przez C^T, C i A i dodawania wektorów. Pokaż ze norma błędu $||x_k - x||_A = ||y_k - y||_{C^TAC}$, zastosuj do oszacowania szybkości zbieżności błędu w tej normie.

Zadanie 6 Niech $A = A^T > 0$ taka że jej wartości własne to $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Chcemy rozwiązać układ $Ax^* = b$ przy pomocy metody Richardsona i znamy x^0 takie że $x^0 - x^*$ jest ortogonalne do wektorów własnych dla wartości własnych $(10, 9, 8, 7, 6, 5)$. Czy dla $\tau = 1/3$ metoda Richardsona: $x^{k+1} = x^k - \tau(Ax^k - b)$ jest zbieżna do x^*? Oszacuj szybkość zbieżności w normie $\|\cdot\|_2$. Wyznacz wartości parametru dla których szybkość zbieżności w normie drugiej będzie największa przy taki założeniu.

Zadanie 7 (dodatkowe) Niech A nieosobliwa. Do rozwiązania układu $A^TAx = A^Tb$ zastosowano następującą metodę iteracyjną:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k A^T r^k \qquad r^k = b - Ax^k$$

dla α_k minimalizującego funkcję $g(\tau) = \|x^k + \tau A^T r^k - x^*\|_2$. Oblicz wzór na α_k ,sprawdź czy metoda poprawnie określona tzn. czy α_k można policzyć bez znajomości x^*. Czy metoda jest zbieżna dla dowolnego x^0 i czy można oszacować $\|x^k - x^*\|_2 / \|x^0 - x^*\|_2$.

Zadanie 8 (dodatkowe) Czy istnieje wartość parametru τ dla którego metoda Richardsona będzie zbieżna (dla dowolnego x_0) dla układu równań z macierzą:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Zadanie 9 (dodatkowe) Dla jakich wartości parametru s nastepująca metoda iteracyjna będzie zbieżna:

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

dla g_1, g_2 ustalonych wartości.

Zadanie 10 Rozpatrzmy macierz symetryczną $A \in \mathbb{R}^{100,100}$ o wartościach własnych $\{1, \ldots, 100\}$ z odpowiednimi wektorami własnymi q_k, tj. $Aq_k = k * q_k$. Chcemy znaleźć rozwiązanie układu równań $Ax^* = b$. Znamy x_0 takie, że $x_0 - x^* = \sum_{k=1}^{15} a_k q_k$ dla a_k współczynników. Określ czy metoda Richardsona będzie zbieżna dla nastepujących wartości parametru τ:

- $\tau = 0.01$
- $\tau = 1$
- $\tau = 0.1$.

W przypadku zbieżności oszacuj błąd $\frac{\|x^* - x_2\|_2}{\|x^* - x_0\|_2}$ dla x_k k-tej iteracji metody.

Zadanie 11 Niech $A = (a_{kl})_{k,l=1}^n$ macierz symetryczna i nieosobliwa o wartościach własnych należących do przedziału $[-1, 2]$. Do rozwiązania układu równań liniowych $Bx^* = b$ z macierzą $B = I + A * A$ zastosowano metodę iteracyjną Richardsona z parametrem $\tau = 1/8$ Określ czy metoda zbiegnie do x^*i w przypadku zbieżności oszacuj odpowiedni błąd:

$$\frac{\|x^* - x_9^{Rich}\|_B}{\|x^* - x_0^{Rich}\|_B},$$

gdzie x_9^{Rich} dziewiąta iteracja Richardsona a $x_0^{Rich} \neq x^*$ - iteracja startowa.

Zadanie własne

Zadanie 12 Dla macierzy $A = [3, -1; -1, 3]$ zastosowano metodę potęgową (z normowaniem przez normę drugą tzn. $\|x_k\|_2 = 1$) z $x_0 = [1; 0]$. Czy otrzymany ciąg lub podciąg wektorów x_k zbiegnie? Jeśli tak to policz odpowiednią granicę. Czy istnieje granica $r_k = x_k^T A x_k / \|x_k\|_2^2$? (notacja octave'a - ; oddziela wiersze)

Zadanie 13 Dla macierzy $A = [10, -1; -1, 10]$ zastosowano odwrotną metodę potęgową z parametrem 8 (z normowaniem przez normę drugą tzn. $\|x_k\|_2 = 1$) z $x_0 = [1; 0]$. Czy otrzymany ciąg lub podciąg wektorów x_k zbiegnie? Jeśli tak to policz odpowiednią granicę. Czy istnieje granica $r_k = x_k^T A x_k / \|x_k\|_2^2$? (notacja octave'a - ; oddziela wiersze)

Zadanie 14 Dla A nieosobliwej takiej, że dla ustalonej liczby b macierz $A - b * I$ jest nieosobliwa i spełnia $A - b * I = QZ$ dla Q ortogonalnej, Z nieosobliwej. Definiujemy macierz

$$C := ZQ + b * I$$

Czy C jest podobna do macierzy A, tzn czy istnieje taka macierz nieosobliwa W, że $WCW^{-1} = A$? Czy znając Z, Q, b możemy macierz W wyznaczyć?

Zadanie 15 (dodatkowe) Dla $A = [-7, 1; -1, -7]$ zastosowano następujący algorytm: $Z_0 = I$ i dla $k = 0, 1, \ldots$ znajdź Z_{k+1} ortogonalną i R_k górnotrójkątną takie, że $Z_{k+1} R_{k+1} = A Z_k$.

- Policz wartości i wektory własne A.

- Pokaż że ciąg pierwszych/drugich kolumn macierzy Z_k mają podciągi zbieżne do wektorów własnych macierzy A.
- Pokaż że macierze R_k zbiegną do macierzy diagonalnej - wyznacz jej wartości na diagonali.
- przyjmując $Q_{k+1} := Z_k^T Z_{k+1}$ pokaż, że $Q_{k+1}R_{k+1} = Z_k^T A Z_k := A_k$ oraz $R_{k+1}Q_{k+1} = Z_{k+1}^T A Z_{k+1} = A_{k+1}$.
- Pokaż, że algorytm : $A_0 = A$ dla $k \geq 0$ policz rozkład QR macierzy $A_k = Q_{k+1}R_{k+1}$ nastepnie policz $A_{k+1} = R_{k+1}Q_{k+1}$ jest równoważny wyjściowemu (przyjmując definicje Z_k, Q_k, A_k z punktów powyżej).

Zadanie 16 Dla macierzy $H + \alpha I$ z macierzą Householdera H $M \times M$, zastosowano metodę potęgową z x_0 o normie drugiej równej jeden.

(a) Dla jakich α i x_0 wektorów startowych metoda zbiegnie (lub będzie miała podciąg zbieżny?) i ewentualnie do czego te podciągi zbiegną.

(b) Jak zaimplementować jedną iteracje tej metody możliwie tanio?

(c) Jak mając tylko procedurę mnożenia przez macierz Householdera a nie mając fizycznie tej macierzy (i nie tworząc jej) wyznaczyć wektor Householdera tej macierzy z użyciem metody potęgowej zastosowanej do $H + \alpha I$?

Zadania dodatkowe - wszystkie oznaczone jako dodatkowe

Zadanie 17 (dodatkowe - bardzo trudne) Dla macierzy nieosobliwej $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ wymiaru $m \times m$ o stałych przekątnych, tzn. $a_{ij} = c_k$ dla $j - i = k$, zaproponuj algorytm rozwiązywania układu $A\vec{x} = \vec{b}$ kosztem kwadratowym.

Zadanie 18 (dodatkowe) (metody bezpośrenie - Blokowe macierze) Mamy układ równań liniowych zapisany blokowo jako

$$\begin{array}{ccccc} A_1x^* & + & B_1y^* & = & b_1 \\ & & A_2x^* & = & b_2 \end{array}$$

z A_k, B_k wymiaru $n \times n$. Zakładamy że macierze A_k nieosobliwe i ż potrafimy rozwiązać układ $A_k y = f_k$ dla dowolnego wektora f_k kosztem $O(n^2)$. Zaproponuj metodę znalezienia rozwiązania wyjściowego układu kosztem $O(n^2)$.

Zadanie 19 (dodatkowe) (Blokowa metoda Gaussa-Seidla dla macierzy dolnotrójkątnej) Dla układu równań liniowych zapisanego blokowo jako

$$\begin{array}{ccccc} A_1x^* & + & B_1y^* & = & b_1 \\ B_2x^* & + & A_2y^* & = & b_2 \end{array}$$

z A_k, B_k wymiaru $n \times n$ zastosowano następującą metodę iteracyjną:

$$\begin{array}{rcrcl} A_1 x_{n+1} & + & B_1 y_n & = & b_1 \\ B_2 x_{n+1} & + & A_2 y_{n+1} & = & b_2 \end{array}$$

pokaż że przy założeniu, że A_k^{-1} odwracalne i

$$\max_k \|A_k^{-1} B_k\|_\infty \leq \rho < 1.$$

zachodzi, że metoda zbieżna w normie $\|\cdot\|_\infty$ dla dowolnych wektorów startowych x_0, y_0 i dodatkowo widzimy oszacowanie

$$\|(x_k, y_k)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty \leq \rho^k \|(x_0, y_0)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty.$$