Zadania z fl, na normy i LZNK

Zadania z fl

Oznaczenie : aew oznacza $a * 10^w$ dla a liczby rzeczywistej z zakresu $[0, 10]$ postaci $d.dddd$ gdzie d to cyfra $0, \ldots, 9$, a w wykładnik czyli liczba całkowita, np $1.234567e5$ oznacza 123456.7 a $0.1234e-3$ oznacza 0.0001234. Zadania czy podpunkty oznaczone jako **dodatkowe/bardzo trudne** nie będą na kartkówce. Część z nich jest trudna pozornie z braku narzędzi, które pojawią się na wykładzie później, albo jest tylko dość mozolna obliczeniowo, czy dotyczą mniej ważnych zagadnień z wykładu.

Zadanie 1 Chcemy obliczyć funkcję $f(x) = \exp(10^7 x)$ w arytmetyce pojedynczej precyzji (nie przejmując się zakresem tzn. niedomiarem/nadmiarem). Policz (przybliżony i względny) współczynnik uwarunkowania zadania dla $x \in [-10, 10]$ i określ czy obliczanie w tej arytmetyce fl wartości f dla $x = -6$ jest dobrze uwarunkowane ze względu na błąd względny?

Zadanie 2 Chcemy w fl obliczyć $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + 7}$. Rozpatrzmy dwa algorytmy: w pierwszym liczymy:

$f := \sqrt{4x^2 + 7}; f := 2x - f;$

a w drugim:

$f := \sqrt{4x^2 + 7}; f := -7.0/(2x + f);$

Który z nich należy zastosować do obliczenia w arytmetyce fl pojedynczej precyzji $f(10^7)$? (Podać krótkie uzasadnienie - 1-2 zdania - nie trzeba formalnie dowodzić oszacowań)

Zadanie 3 Chcemy obliczyć $(x + 2)^3 - 8$ dla $x > 0$. Zaproponuj algorytm o małym błędzie względnym obliczania tej funkcji dla $x > 0$. (uzasadnij)

WSK: Można pokazać numeryczną poprawność + dobre uwarunkowanie - co gwarantuje mały błąd względny (wykład) ale wystarczy uzasadnić krótko w 2-3 zdaniach.

Zadanie 4 (dodatkowe) Było na ćwiczeniach. Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania: iloczynu skalarnego dwóch wektorów $x, y \in \mathbb{R}^M$ tzn. $x^T y = \sum_{k=1}^{M} x(k)y(k)$ jest numerycznie poprawny tzn. obliczamy

```
s=x(1)*y(1);
for  k=2:M,
   s=s+x(k)*y(k);
endfor
```

Zadanie 5 (dodatkowe) Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania iloczynu macierz kwadratowej $A \in \mathbb{R}^{M,M}$ i wektora $x, \in \mathbb{R}^M$ tzn. $y = Ax$: jest numerycznie poprawny:

```
for   j=1:M,
 y(j)=0;
 for  k=1:M,
    y(j)=y(j)+A(j,k)*x(k);
 endfor
endfor
```

Wskazówka: $y(j)$ jest iloczynem skalarnym $j-$tego wiersza A z x.

Zadanie 6 (bardzo trudne) Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania: cosinusa kąta dwóch wektorów $x, y \in \mathbb{R}^M$ tzn. $\cos(x, y) = \frac{x^T y}{\sqrt{x^T x}\sqrt{y^T y}}$ jest numerycznie poprawny:

(a) $a = \sqrt{\sum_{k=1}^{M} x_k^2}$, $b = \sqrt{\sum_{k=1}^{M} y_k^2}$

(b) $c = \sum_{k=1}^{M} x_k y_k$

(c) $w = c/(a * b)$

Zadania z norm

Zadanie 7 Dla $C = 10^{30}$ znajdź takie $\alpha > 0$, że dla normy postaci $\|x\| = |x_1| + \alpha|x_2|$ w $\mathbb{R}^2$ zachodziło

$$\max_{x \neq 0} \frac{\|x\|_1}{\|x\|} = C \qquad \min_{x \neq 0} \frac{\|x\|_1}{\|x\|} = 1$$

tzn. by optymalne stałe równoważności były równe C i jeden odpowiednio.

Zadanie 8 Znajdź możliwe duże $c > 0$ i możliwie małe $C > 0$, że dla normy wektorowej w $\mathbb{R}^k$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} j^{-1}|x_j|^2}$ zachodzi

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k \qquad c\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|_2.$$

Stałe c, C nazywamy stałymi równoważności między normą drugą a normą $\|\cdot\|$.

Zadanie 9 (dodatkowe) Dla wektora rzeczywistego $x = (x_i)_{i=1}^m$ definiujemy $|x| = (|x_i|)_{i=1}^m$. Dla norm p-tych zachodzi zawsze $\|x\|_p = \||x|\|_p$. Czy istnieje norma $\|\cdot\|$ w $\mathbb{R}^2$ dla której istnieje wektor x taki, że $\|x\| \neq \||x|\|$? Uzasadnij (w przypadku na tak podaj definicję normy).

Zadanie 10 (dodatkowe) Dla macierzy rzeczywistej $A = (a_{ij})_{i,j}$ $n \times n$ zdefiniujmy $|A| = (|a_{ij}|)_{ij}$.

(a) Czy dla normy Frobeniusa, maksimum i pierwszej zachodzi równość norm A i $|A|$? Wsk: Istnieją proste wzory na te normy zależne od współczynników macierzy.

(b) Pokaż np wprost z definicji normy indukowanej, że

$$\|A\|_2 \leq \||A|\|_2.$$

(c) Podaj kontrprzykład, że odwrotna nierówność nie zawsze zachodzi. Wsk: Można skonstruować kontrprzykład $A = A^T$ 2×2 korzystając ze wzoru: $\|A\|_2 = \rho(A)$ - dla $A = A^T$. Tu $\rho(A)$ moduł największej co do modułu wartości własnej A.

Zadanie 11 (dodatkowe) Pokaż że jeśli dla wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$ (x ma niezerowe składowe tzn. $x_k \neq 0$) zachodzi $\frac{|x_k - y_k|}{|x_k|} \leq \epsilon$

$$\frac{|x_k - y_k|}{|x_k|} \leq \epsilon \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

to

$$\frac{\|x_k - y_k\|_p}{\|x_k\|_p} \leq \epsilon \qquad p = 1, 2, \infty \tag{2}$$

Zadanie 12 (dodatkowe) Czy stwierdzenie odwrotne do poprzedniego zadania jest prawdziwe np. dla $p = \infty$ czy z tego że zachodzi (2) zachodzi (1)? Jeśli nie zachodzi proszę podać kontrprzykład np. dla $n = 2$.

Zadanie 13 (dodatkowe) Dla macierzy A wymiaru 10×10 z Zadania 9, patrz poniżej, dla $a_k = d_k = -b_k = -c_k = 1$ dla wszystkich odpowiednich k, oblicz indukowaną normę maksimum tzn. $\|A\|_\infty$ i wyznacz taki wektor x różny od zera, że $\|x\|_\infty \|A\|_\infty = \|Ax\|_\infty$. Czy wektor x jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do przemnożenia przez -1)?

Zadanie 14 (dodatkowe) Dla danego $\epsilon > 0$ niech

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 & 0 \\ 1 & \epsilon & 1 \\ 0 & 1 & \epsilon \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{cond}_2(A_\epsilon) = \infty.$$

Wsk: Dla $A = A^T$ $\|A\|_2 = \rho(A)$ promień spektralny (max z modułu z wartości własnych) - zauważmy że $A = \epsilon I + A_0$ dla

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

więc $\lambda(A_\epsilon) = \epsilon + \lambda(A_0)$, tu $\lambda(C)$ oznacza zbiór wartości własnych macierzy C.

Zadanie 15 (dodatkowe) Mamy 2 układy równań liniowych: $Ax = b$ i drugi z zaburzoną macierzą A tzn

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{A}x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.98 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Policz bład bezwględny:$\|x_1 - x_2\|_\infty$, względny: $\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$ oraz współczynniki uwarunkowania A i $\hat{A}$ w normie maksimum.

Zadania na LZNK

Zadanie 16 Dla danych m różnych punktów (x_k, y_k) określamy krzywą $y - a*x^4 - bx^2 - c = 0$ $(a, b, c$ parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^{m} |y_k - a * x_k^4 - bx_k^2 - c|^2 = \min_{\hat{a},\hat{b},\hat{c}} \sum_{k=1}^{m} |y_k - \hat{a} * x_k^4 - \hat{b} * x_k^2 - \hat{c}|^2$$

Sformułuj zadanie znalezienia parametrów takiej krzywej jako liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) dla danych m punktów. Określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to zadania miało jednoznaczne rozwiązanie dla $m \geq 0$. Wyznacz koszt rozwiązania tego LZNK zadania przy pomocy algorytmu Householdera względem m tzn jako $C_H m^p + O(m^{p-1})$ dla C_H stałej dodatniej i p wykładnika naturalnego.

Zadanie 17 Niech A macierz $n+1 \times n$ kolumnami regularna trójdiagonalna tzn. wszystkie elementy takie, że $|i - j| > 1$ są równe zero. Jak rozwiązać LZNK z taką macierzą kosztem rzędu $C_1 n + C_2$ dla C_1, C_2 stałych dodatnich z użyciem rozkładu QR uzyskanym z wykorzystaniem macierzy Householdera.

Zadanie 18 (dodatkowe) Rozpatrzmy macierz A wymiaru $(n+1) \times n$ taką że jeśli zapisując blokowo mamy:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \vec{b}_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

dla A_1 macierzy $n \times (n-1)$ i wektora $\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ z b_2 różnym od zera i $\vec{b}_1$ wektorem wymiaru n. Znamy macierze: górnotrójkątną max rzędu R wymiaru $n \times (n-1)$ i Q_1 ortogonalną wymiaru $n \times n$ że

$$A_1 = Q_1 R.$$

oraz potrafimy policzyć iloczyn $Q_1 x$ lub $Q_1^T x$ kosztem liniowym tzn. Cn dla pewnej stałej C. Czy macierz A jest kolumnami regularna? A jeśli tak to jak możliwie tanio znaleźć rozkład QR macierzy A z Q ortogonalną

i R górnotrójkątną? Podaj koszt jako funkcję postaci $C_2 n^p + O(n^{p-1})$ dla najniższego możliwego p naturalnego i jakiejś stałej C_2. Można rozważyć dwa przypadki - pierwszy kiedy explicite wyliczamy Q a drugi gdy otrzymujemy Q jako iloczyn odpowiednio dobranych macierzy ortogonalnych.

Zadanie 19 Rozpatrzmy rodzinę LZNK z macierzą A_α i wektorem f takich, że:

$$H_2 * H_1 * A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

gdzie H_k jest macierzą Householdera z odpowiednim wektorem Householdera w_k: $w_1 = (1,1,1,1)^T$ i $w_2 = (0,-2,0,0)^T$.

(a) Określ dla jakich wartości α to LZNK ma jednoznaczne rozwiązanie.

(b) Policz pierwsze kolumny macierzy A_α dla α równego 8 i $-\sqrt{7}/23$.

(c) Dla jakiego α błąd rozwiązania LZNK $\|A_\alpha x_\alpha^* - f\|_2$ jest najmniejszy? Tu x_α^* to rozwiązania LZNK z A_α i f.

Zadanie 20 (dodatkowe) bo za długie na kartkówke... Rozważmy zadanie: Dla danych m punktów $z_k \in R^3$ i danego niezerowego wektora $\vec{n} \in R^3$ znajdź wektor $x \in R^3$ należący do płaszczyzny prostopadłej do wektora $\vec{n}$ tzn. zadanej wzorem $P_\alpha = \{x : x^T \vec{n} = \alpha\}$ taki, że suma kwadratów odległości

$$\sum_{k=1}^{M} dist(z_k, P_\alpha)^2$$

jest minimalna. Tu $dist(z, P_\alpha) = \min_{y \in P_\alpha} \|z - y\|_2$.

(a) Pokaż, że $dist(z, P_\alpha) = |z^T \vec{n} - \alpha| = |(z - x)^T \vec{n}|$ dla dowolnego $x \in P_\alpha$.

(b) Sformułuj to zadanie jako LZNK z A $m \times 3$ i wektorem f $m \times 1$.

(c) Pokaż, że to LZNK nie jest regularne i zaproponuj metodę znalezienia rozwiązania o minimalnej normie drugiej (to klasyczny warunek by ujednoznacznić LZNK) za pomocą przekształceń Householdera. Oszacuj koszt jako $O(m^p)$ dla możliwie małego p naturalnego. Czy ta metoda pozwoli znaleźć też bazę przestrzeni zerowej macierzy A?

(d) Przeformułuj to zadanie na znalezienie P_α czyli de facto α i sformułuj jako regularne LZNK z macierzą niezerową $m \times 1$.

Można założyć, że $\|\vec{n}\|_2 = 1$ - to trochę uprości wzory.

Zadanie 21 (zadanie z kolokwium 2017/18 - przeformułowane) Mamy macierz A $m \times n$ $n \leq m$ i macierze Q, V ortogonalne, oraz C 2-diagonalną górno-trójkątną o niezerowej głownej diagonali, takie, że

$$A = QCV$$

Jak za pomocą macierzy Householdera rozwiązać LZNK z macierzą A i wektorem prawej strony b możliwie tanio? Czy rozwiązanie tego LZNK jest jednoznaczne?