Zadania na rozkłady LU, Choleskiego etc

Zadanie 1 Napisz w pseudokodzie algorytm rekurencyjny Choleskiego polegajacy na tym, że dzielimy macierz $A = A^T > 0$ na 4 bloki mniej więcej podobnych wielkości (przy parzystym wymiarze na równe) tzn.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

i szukamy macierzy górnotrójkątnej

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}$$

wyznaczając bloki R_{11}, R_{22} odpowienim wywołaniem rekurencyjnym tej funkcji. Powinnismy otrzymać czynnik g-trójkątny rokładu Choleskiego taki, że $A = R^T R$.

Zadanie 2 Znamy rozkład Choleskiego LDL^T macierzy $A = A^T > 0$ wymiaru $m \times m$. Jak możliwie tanio wyznaczyć element macierzy odwrotnej A^{-1} na pozycji $(1, 1)$, tzn. w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie.

Zadanie 3 (dodatkowe) Udowodnij, że dla macierzy $A = (a_{kl})$ silnie diagonalnie dominującej wierszowo tzn.

$$|a_{kk}| > \sum_{k \neq l} |a_{kl}| \ \forall k$$

eliminacje Gaussa tzn rozkład LU można wykonać bez wyboru elementu głównego (czyli bez permutacji kolumn czy wierszy).

Uwaga: Nie jest to trudne ale na tyle mozolne że na kartkówce nie będzie - ale TRZEBA to wiedzieć więc zachęcam do przeliczenia.

Zadanie 4 Niech

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 30 & 22 & 11 \\ 0 & 20 & 110 \end{pmatrix}$$

Znajdź metodą eliminacji Gaussa z wyborem elementu w kolumnie (częściowy wybór elementu głównego) macierze L, U, P gdzie L dolnotrójkątna z jedynkami na diagonali, U górnotrójkątna, P permutacji takie, że $PA = LU$.

Zadanie 5 Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Znajdź metodą eliminacji Gaussa dla macierzy symetrycznej dodatnio określonej macierze rozkładu Choleskiego tzn. L, D gdzie L dolnotrójkątna z

jedynkami na diagonali, D diagonalna z dodatnimi elementami na diagonali, takie, że $A = LDL^T$. jak znając ten rozkład znaleźć czynnik rozkładu Choleskiego tzn. $\hat{L}$ macierz dolnotrójkątną taką, że $A = \hat{L}\hat{L}^T$?

Zadanie 6 Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Znajdź metodą Choleskiego czynnik rozkładu Choleskiego tzn. L macierz dolnotrójkątna z dodatnią przekątną taką, że $A = LL^T$. Czy istnieje rozkład Choleskiego macierzy

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}?$$

Zadanie 7 (dodatkowe) Rozpatrzmy macierz kwadratową wymiaru $(m+2) \times (m+2)$ dla $m \geq 2$ zapisaną w formie blokowej $A = \begin{pmatrix} C & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$, gdzie C dana nieosobliwa macierz $m \times m$, której czynniki rozkładu QR mamy dane (tzn znamy ortogonalną Q i górnotrójkątną R takie, że $C = QR$), B macierz $m \times 2$ maksymalnego rzędu.

(a) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu równań liniowych $A\vec{x} = \vec{f}$ możliwie niskim kosztem przy założeniu, że A nieosobliwa.

(b) Oszacuj ten koszt w terminach $C_1 m^p + O(m^{p-1})$ dla $p = 1, 2, 3, \ldots$ i C_1 stałej.

(c) Czy przy powyższych założeniach A jest nieosobliwa? Jeśli nie to podaj możliwy do sprawdzenia możliwie tanio warunek na C i B, aby A była nieosobliwa.

Zadanie 8 (dodatkowe) (Układ z macierzą trójdiagonalną) Rozpatrzmy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ i A macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko na 3 głównych przekątnych (diagonalach), tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa

(rozkładu LU) bez wybory elementu głównego możliwie niskim koszcie względem n. Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej C i p naturalnego).

Wsk: Eliminujemy tylko poddiagonale - $n-1$ kroków o stałym koszcie - otrzymujemy rozkład LU z L, U 2-diagonalnymi.

Zadanie 9 (dodatkowe) (Układ z macierzą trójdiagonalną cykliczną) Rozpatrzmy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ i A macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko w rogach i na 3 głównych diagonalach tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ d_2 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa (rozkładu LU) bez wybory elementu głównego możliwie niskim koszcie względem n. Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej C i p naturalnego).

Wsk: Dla $d_1 = d_2 = 0$ algorytm jest znany , por. zad 8, zmodyfikuj ten algorytm dla macierzy cyklicznej.