

Projekt z labu - LZNK - wielomian trygonometryczny symetryczny

Zaprogramować funkcję rozwiązującą problem znalezienia współczynników wielomianu trygonometrycznego parzystego stopnia dwa postaci $y(x) = a + b \cos(x) + c \cos(2x)$ najlepiej przybliżającego dane punkty (x_k, y_k) $k = 1, \dots, m$ za pomocą metody Householdera tzn. szukamy (a, b, c) takiego, że

$$\sum_{k=1}^m |a + b \cos(x_k) + c \cos(2x_k) - y_k|^2 = \min_{\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}} |\hat{a} + \hat{b} \cos(x_k) + \hat{c} \cos(2x_k) - y_k|^2 =$$

czyli w funkcji rozwiązujemy LZNK: $A * [a; b; c] \approx \vec{y}$ z macierzą $A = [\vec{1}, \cos(\vec{x}), \cos(2\vec{x})]$ dla wektorów $\vec{x} = [x_1, \dots, x_m]^T$, $\vec{1} = [1, \dots, 1]^T$, $f(\vec{x}) = [f(x_1), \dots, f(x_m)]^T$ i wektorem prawej strony $\vec{y} = [y_1, \dots, y_m]^T$.

Jako input traktujemy wektory \vec{x}, \vec{y} długości m , jako output uzyskujemy:

- wektor $[a; b; c]$ z rozwiązaniem tego LZNK,
- macierz A z LZNK
- macierz górnotrójkątną R wymiaru 3×3 z rozkładu QR macierzy A metodą Householdera tzn. $A = Q * [R; 0]$,
- trzykolumnową macierz $B = [\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3]$ wymiaru $m \times 3$ -w której odpowiednie kolumny to wektory Householdera \vec{h}_k $k = 1, 2, 3$ dla macierzy Householdera H_k takich, że $H_1 * H_2 * H_3 = Q$.

Jeśli kolumny macierzy A okażą się zależne liniowo (numerycznie z tolerancją $TOL = 1e - 12$) - funkcja ma zwrócić odpowiedni komunikat na ekran.

Testy:

1. Przetestować dla 3 różnych punktów z różnymi x_k - czy znajdzie krzywą przechodzącą przez te punkty. Porównać wynik Państwa funkcji z wynikiem otrzymanym przez backslash i.e. $A \backslash y$.
2. znajdź (teoretycznie) i przetestuj takie 3 różne punkty dla których zadanie nie będzie miało jednoznacznego rozwiązania; program powinien nas o tym ostrzec.

3. Przetestować dla punktów leżących na krzywej: tzn. wziąć kilka różnych (losowych?) punktów x_k z $[0, \pi)$ oraz $y_k = 1 + 2 * \cos(x_k) - 10 \cos(2x_k)$ i sprawdzić czy funkcja zwróci $a = 1, b = 2, c = -10$.
4. Przetestować dla funkcji nieparzystej tzn wziąć symetryczne punkty względem zero oraz $y_k = x_k - x_k^3$ - czy otrzymana funkcja też jest nieparzysta lub np. stała tzn. czy $a = b = c = 0$ lub prawie symetryczna $a, b, c \approx 0$?
5. Przetestować dla punktów leżących blisko danej krzywej tzn wziąć np. $x_k = \pi * k / m$ dla $k = 0, \dots, m - 1$ dla różnych $m > 1$ z $y_k = 1 + 2 * \cos(x_k) - 10 \cos(2x_k) + \epsilon_k$ dla ϵ_k losowego z zakresu $[-1e - 3, 1e - 3]$
(funkcja octave'a **rand()** zwraca losowe punkty z zakresu $[0, 1]$).
6. Sprawdzić czy rzeczywiście dla otrzymanych wektorów Householdera i macierzy R, A zachodzi

$$A = H_1 * H_2 * H_3 * [R; 0],$$

np. dla 2-3 przykładów z poprzednich podpunktów (w tym celu można stworzyć macierze H_k i $[R; 0]$ i te macierze wymnożyć, choć można tego uniknąć).

Proszę napisać testy tak by była możliwość zrobienia jednego konkretnego testu.

Ocena za poprawne wyniki otrzymane opisaną metodą: za poprawne działanie funkcji 70% (poprawne wyniki testów 1-3) , 30% za poprawne wyniki testów i analizę wyników.