Rekurencyjny algorytm Choleskiego $A = R^T DR$

Projekt składa się z dwóch części:

1. Napisania funkcji octave'a cholrdr() z metodą znajdowania czynnika rozkładu Choleskiego macierzy $A = A^T > 0$ wymiaru $M \times M$, tzn. macierzy górnotrójkątnej R z jedynkami na diagonali i diagonalnej D takich, że $A = R^T DR$ dla R wymiaru $M \times M$ blokowym rekurencyjnym algorytmem dzielącym A na 4 bloki tzn. jeśli $m = 1$ to $R = 1, D = A$, wtedy A to dodatni skalar a R, D to macierz 1×1 czyli też skalary, w przeciwnym przypadku w kolejnych krokach liczymy:

   (a) dzielimy blokowo wiersze/kolumny macierzy A tzn A=[A11,A12;A21,A22] np. tak by by wymiar macierzy kwadratowych $A11, A22$ na blokowej diagonali był równy sobie dla M parzystego - lub prawie równy, gdy M jest nieparzyste (choć algorytm działa dla dowolnego podziału.)

   (b) wywołujemy rekurencyjnie funkcję R11=cholrdr(A11) znajdując odpowiedni rozkład Choleskiego tzn. $R11^T * D1 * R11 = A11$,

   (c) wyliczamy wtedy $R12$ rozwiązując backslashem odpowiednie układ z macierzą trójkątną i odpowiednio diagonalną otrzymując $R12$ (określenie jaki układ to też część zadania)

   (d) znajdujemy czynnik rozkładu Choleskiego $R22, D2$ odpowiedniej macierzy kolejnym wywołaniem rekurencyjnym cholrdr(),

   (e) tworzymy nasz czynniki Choleskiego tzn. R=[R11,R12;0,R22], D=[D1,0;0,D2] - zero oznacza blok zerowy odpowiedniego wymiaru. W implementacji macierz diagonalną należy utworzyć za pomocą funkcji **diag**().

   (wszędzie używamy składni octave'a do zapisywania macierzy blokowego, przecinki oddzielają bloki wierszowo, średniki kolumnowo).

   Parametrem funkcji:

   ```
   function [R,D]=cholrdr(A)
   % kod funkcji
   end
   ```

   ma być: macierz A,

   Funkcja ma zwracać macierze R, D czyli czynniki rozkładu Choleskiego.

2. **Testy**:

(a) **Test czy metoda działa** Przetestować na kilku prostych przykładach dla losowych macierzy symetrycznych dodatnio określonych $m \times m$ - np. dla $m = 3, 10, 20$ sprawdzając czy $\|R^T * D * R - A\|_1$ małe... Jak stworzyć losowa macierz symetryczną dodatnio określoną: np. losujemy macierz B i liczymy $A = B^T B$.

(b) **Test dla trudnych przykładów** wziąć złą numerycznie macierz np. macierz Hilberta $n \times n$ dla różnych n i powtórzyć testy jak w poprzednim punkcie.

(c) **Test dla złych macierzy** Wziąć macierz symetryczną ale nieokreśloną dodatnio -funkcja powinna dać ostrzeżenie (jak to zrobić bez jakiś extra obliczeń?). Powinno się sprawdzić też symetryczność np. licząc $\|A - A^T\|_1$.

(d) **Zastosowanie do rozwiązania układu równań liniowych** Zastosować tę funkcję do rozwiązania $B^T Bx = b$ z losową macierzą B 20×20 i losowym wektorem prawej strony b - porównać z wynikiem otrzymanym operatorem *backslash*.

(e) Mogę poprosić ad hoc o test z jakąś prostą macierzą.