Zadania z fl, interpolacji, aproksymacji

Zadania z fl

Oznaczenie : aew oznacza $a * 10^w$ dla a liczby rzeczywistej z zakresu $[0, 10]$ postaci $d.dddd$ gdzie d to cyfra $0, \ldots, 9$, a w wykładnik czyli liczba całkowita, np $1.234567e5$ oznacza 123456.7 a $0.1234e-3$ oznacza 0.0001234. Zadania czy podpunkty oznaczone jako **dodatkowe/bardzo trudne** nie będą na kartkówce. Część z nich jest trudna pozornie z braku narzędzi, które pojawią się na wykładzie później, albo jest tylko dość mozolna obliczeniowo, czy dotyczą mniej ważnych zagadnień z wykładu.

Zadanie 1 Chcemy obliczyć funkcję $f(x) = \exp(10^7 x)$ w arytmetyce pojedynczej precyzji (nie przejmując się zakresem tzn. niedomiarem/nadmiarem). Policz (przybliżony i względny) współczynnik uwarunkowania zadania dla $x \in [-10, 10]$ i określ czy obliczanie w tej arytmetyce fl wartości f dla $x = -6$ jest dobrze uwarunkowane ze względu na błąd względny?

Zadanie 2 Chcemy w fl obliczyć $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + 7}$. Rozpatrzmy dwa algorytmy: w pierwszym liczymy:

$f := \sqrt{4x^2 + 7}; f := 2x - f;$

a w drugim:

$f := \sqrt{4x^2 + 7}; f := -7.0/(2x + f);$

Który z nich należy zastosować do obliczenia w arytmetyce fl pojedynczej precyzji $f(10^7)$? (Podać krótkie uzasadnienie - 1-2 zdania - nie trzeba formalnie dowodzić oszacowań)

Zadanie 3 Chcemy obliczyć $(x + 2)^3 - 8$ dla $x > 0$. Zaproponuj algorytm o małym błędzie względnym obliczania tej funkcji dla $x > 0$. (uzasadnij)

WSK: Można pokazać numeryczną poprawność + dobre uwarunkowanie - co gwarantuje mały błąd względny (wykład) ale wystarczy uzasadnić krótko w 2-3 zdaniach.

Zadanie 4 (dodatkowe) Było na ćwiczeniach. Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania: iloczynu skalarnego dwóch wektorów $x, y \in \mathbb{R}^M$ tzn. $x^T y = \sum_{k=1}^{M} x(k)y(k)$ jest numerycznie poprawny tzn. obliczamy

```
s=x(1)*y(1);
for  k=2:M,
   s=s+x(k)*y(k);
endfor
```

Zadanie 5 (dodatkowe) Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania iloczynu macierz kwadratowej $A \in \mathbb{R}^{M,M}$ i wektora $x, \in \mathbb{R}^M$ tzn. $y = Ax$: jest numerycznie poprawny:

```
for  j=1:M,
 y(j)=0;
 for  k=1:M,
   y(j)=y(j)+A(j,k)*x(k);
 endfor
endfor
```

Wskazówka: $y(j)$ jest iloczynem skalarnym $j-$tego wiersza A z x.

Zadanie 6 (bardzo trudne) Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania: cosinusa kąta dwóch wektorów $x, y \in \mathbb{R}^M$ tzn. $\cos(x,y) = \frac{x^Ty}{\sqrt{x^Tx}\sqrt{y^Ty}}$ jest numerycznie poprawny:

(a) $a = \sqrt{\sum_{k=1}^M x_k^2}$, $b = \sqrt{\sum_{k=1}^M y_k^2}$

(b) $c = \sum_{k=1}^M x_k y_k$

(c) $w = c/(a * b)$

Interpolacja wielomianowa

Zadanie 7 Dla danej tabelki

x_k	-1	0	1
$f(x_k)$	-2	0	2
$f'(x_k)$		1	
$f''(x_k)$		0	

znajdź za pomocą algorytmu różnic dzielonych współczynniki wielomianu stopnia ≤ 4 w bazie Newtona związanej z węzłami i ich krotnościami i kolejnością z tabelki. (Dwa węzły jednokrotne i jeden trzykrotny).

Zadanie 8 Niech

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= (x-1) \\ p_3(x) &= (x-1)(x-2) \\ p_3(x) &= (x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

oraz $w(x) = p_0(x) + p_1(x) - 2p_2(x) + 3p_3(x)$. Oblicz różnicę dzieloną $w[2,3,4]$.

Zadanie 9 Czy możemy stwierdzić że $\|f - w\|_{\infty,[-1,1]} \leq 0.1$ dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ i $w(x)$ wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia co najwyżej dwa takiego, że $\sin(j) = w(j)$ dla $j = -1, 0, 1$.

Zadanie 10 (pierwszy podpukt - trudne)

- Pokaż, że $\||\Pi_{k=0}^N (x - x_k)\|_{\infty,[a,b]} \leq 0.25 N! h^{N+1}$ dla $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ i $h = \max_{k=1,\ldots,N} |x_k - x_{k-1}|$.
- Korzystając z tego wzoru oszacuj błąd $e_{k,3} := \|f_k - w_{k,3}\|_{\infty,[0,10]}$ dla $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2 = \log(1+x)$ i $w_{k,N}$ wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia co najwyżej N interpolującego funkcję f_k w $N+1$ węzłach równoodległych.

Zadanie 11 (dodatkowe) Oszacuj błąd $e_{k,N} := \|f_k - w_{k,N}\|_{\infty,[0,10]}$ dla $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2 = \log(1+x)$ i $w_{k,N}$ wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia co najwyżej N interpolującego funkcję f_k w $N+1$ węzłach Czebyszewa. Czy w obu przypadkach zachodzi: $e_{k,N} \to 0$ dla $N \to \infty$?

Zadanie 12 Dla danych różnych węzłów $\{x_k\}_{k=0}^n \subset [a,b]$ niech $\{l_k\}_{k=0}^n$ będzie bazą Lagrange'a $\mathcal{P}_n$ a dla tych węzłów, i niech $L_n f$ wielomian interpolujący daną funkcję ciągłą $f \in C([a,b])$ w tych węzłach. Pokaż , że

$$\|L_n f\|_{\infty,[a,b]} \leq \left(\sum_{k=0}^N \|l_k\|_{\infty,[a,b]}\right) \|f\|_{\infty,[a,b]}.$$

Zadanie 13 (dodatkowe) Pokaż, że dla $k+1$ różnych punktów różnica dzielona spełnia:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\Pi_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k}(x_j - x_i)}$$

Zadanie 14 (dodatkowe) Niech $(x_k)_{k=0}^{n}$ będą różnymi węzłami. Znajdź współczynniki wielomianu

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^4 \frac{\Pi_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x - x_j)}{\Pi_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)}$$

w bazie potęgowej $(1, x, \ldots, x^n)$ dla $n = 10$.

Interpolacja splajnowa

Zadanie 15 Rozpatrzmy w funkcje na $[-1, 2]$ taką, że w obcięte do $[-1, 0]$ jest wielomianem liniowym, w na $[0, 2]$ jest wielomianem kwadratowym (tzn stopnia co najwyżej dwa) oraz $w(k) = f(k)$ dla $k = -1, 0, 1, 2$. Czy taka funkcja w jest wyznaczona jednoznacznie? Oszacuj możliwie dokładnie błąd $e := \|f - w\|_{\infty,[-1,2]}$ dla $f(x) = \sin(4\pi * x)$.

Zadanie 16 Na odcinku $[0, 10]$ mamy węzły równo-odległe: $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ z $x_k = k * h$ dla $h = \frac{10}{N}$. Dla danej funkcji $f(x) = \sin(4 * x)$ szukamy funkcję ciągłą $s \in C([a, b])$ taką, że na każdym pod-odcinku (x_k, x_{k+1}) ta funkcja s jest wielomianem stopnia co najwyżej dwa i spełnia warunki interpolacyjne:

$$\begin{aligned} s(x_k) &= f(x_k) \qquad k = 0, \ldots, N \\ s\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) &= f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \qquad k = 0, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

(a) Czy taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie?

(b) Wyznacz możliwie małą stałą $C > 0$ niezależną od h taką, że

$$\|f - s\|_{\infty,[0,10]} \leq C\, h^3.$$

Zadanie 17 (dodatkowe) Na odcinku $[a, b]$ mamy zadane węzły : $a = x_0 < \ldots < x_N = b$. Niech s splajn kubiczny na tym podziale odcinka (czyli funkcja w $C^2([a, b])$ na pod-odcinkach będąca wielomianem kubicznym) naturalny tzn. $s''(a) = s''(b) = 0$ i $f \in C^2([a, b])$ taka, że

$$f(x_k) = 0 \qquad k = 0, \ldots, N.$$

Pokaż, że

$$\int_a^b f^{(2)} s^{(2)}\, dx = 0.$$

Zadanie 18 Rozpatrzmy odcinek $[a, b] = [-2, 2]$ z węzłami $x_k = -2, -1, 0, 1, 2$ dla $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Czy istnieje splajn kubiczny naturalny s taki, że w węzłach przyjmuje wartości kolejno: $0, 2, 1, 2, 0$ i równocześnie s obcięte do odcinka $[x_2, x_3] = [0, 1]$ jest równe $1 + x^2$. Splajn kubiczny jest naturalny gdy $s''(a) = s''(b) = 0$.

WSK: można policzyć współczynniki splajnu w jakiejś bazie wielomianów kubicznych na $[x_3, x_4] = [1, 2]$ i sprawdzić czy wtedy druga pochodna jest równa zero w $x_4 = b = 2$.

Aproksymacja, wielomiany ortogonalne

Zadanie 19 (dodatkowe) Znajdź wzory na regułę trójczłonową $P_{n+1} = a_n x P_n + b_n P_n + c_n P_{n-1}$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ dla wielomianów ortonormalnych P_n w $(f, g)_{L^2_\rho(a,b)}$. Wielomiany ortonormalne $P_n = \alpha_n x^n + \ldots$ spełniają

$$(P_n, P_m)_{L^2_\rho(a,b)} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \qquad m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Zadanie 20 (dodatkowe) Znajdź wzory na regułę trójczłonową dla wielomianów Czebyszewa na $[a, b]$ tzn dla $\hat{T}_n(x) = T_n((x - \frac{a+b}{2}) * \frac{2}{b-a})$ gdzie $\{T_n\}_{n\geq 0}$ to wielomiany Czebyszewa na $[-1, 1]$ spełniające $T_0 = 1, T_1(t) = t$ i $T_{n+1} + T_n = 2tT_n$.

Zadanie 21 (dodatkowe) Rozpatrzmy $g(x) = \sin(x)$ i zadania znalezienia wielomianów najlepszej aproksymacji dla g: $w_1 \in V_1 = P_n$ i $w_2 \in V_2 = P_{n-1}$ dla $n > 0$ w normie:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos(x))|f(x)|^2 \, dx}.$$

(a) Znajdź w_1, w_2 dla $n = 1$.

(b) Dla jakich $n > 0$ prawdą jest, że $w_1 = w_2$? Uzasadnij odpowiedź.

WSK: to norma typu L^2 więc generowana przez iloczyn skalarny typu L^2 z odpowiednią wagą a podprzestrzenie są przestrzeniami wielomianów. Każda metod opisana w skrypcie zadziała ale żeby sobie uprościć rachunki można zauważyć, że w iloczynie skalarnym generującym tę normę $(u, v) = 0$ o ile $u * v$ jest funkcją nieparzystą np. $(\sin(x)x^k)$ lub (x^k, x^j) dla k parzystego a j nieparzystego.

Zadanie 22 (dodatkowe)

(a) Pokaż, że element najlepszej aproksymacji jednostajnej, czyli w normie $\|\cdot\|_\infty$, w P_n na $[a, b]$ dla dowolnej funkcji ciągłej f interpoluje tę funkcję w $n + 1$ punktach na $[a, b]$.

(b) Czy prawdą jest, że dla danej funkcji f ciągłej na $[a, b]$ zawsze istnieje ciąg węzłów $\{x_k^n\}_{k=0}^n \subset [a, b]$ taki, że ciąg wielomianów stopni nie większych od n: $L_n f$ interpolujących tę funkcję w tych węzłach (tzn. $L_n f(x_k^n) = f(x_k^n)$) zbiega jednostajnie do tej funkcji? Uzasadnij odpowiedź.

WSK: Użyj twierdzenia o alternansie.

Zadanie 23 (dodatkowe) Dla zbioru $K = \{-1, 0, 1\}$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty,K} = \max_{x\in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = x^2 - 1.876 * x + \sqrt{17}$.

WSK: Ile punktowy jest alternans dla wielomianu liniowego a ile punktów jest w zbiorze K?

Zadanie 24 Niech $f(x) = 42x^3 - 2x^2 + 2x - 1$. Znajdź wielomian stopnia ≤ 2 najlepiej przybliżający f w normie supremum na przedziale

- $[-1, 1]$
- $[-7, -5]$

- $[0, 1]$
- $[0, 4]$

Jeśli to zadanie będzie na kartkówce to będzie trzeba wybrać 2 przedziały.
WSK: można skorzystać z własności wielomianów Czebyszewa i ich własności minimalizacyjnych na $[-1, 1]$ i odpowiedniego liniowego przeskalowania

Zadanie 25 Niech $f(x) = 42x^3 - 2x$. Pokaż że $w_1 = w_2$ dla w_n wielomianu najlepszej aproksymacji jednostajnej dla f stopnia $\leq n$ na $[-5, 5]$. Następnie znajdź w_1.

Czy znając w_1 potrafisz znaleźć wielomian liniowy najlepszej aproksymacji jednostajnej dla $g(x) = 21 * x^3 + x - 2$?

Wielomian najlepszej aprosymacji jednostajnej w_n st $\leq n$ dla $f \in C([a, b])$: spełnia: $\|f - w_n\|_{\infty,[a,b]} = \inf_{p \in P_n} \|f - p\|_{\infty,[a,b]} \quad \forall p \in P_n$. Tu P_n przestrzeń wielomaniów stopnia $\leq n$.

WSK: f jest nieparzystą więc można pokazać (jak?) ze wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej w_n stopnia $\leq n$ też będzie funkcją nieparzystą. Zauważ że $g(x) = 0.5 * f(x) + 2x - 2$.

Zadanie 26 (dodatkowe) Dla zbioru $K = [-1, 1]$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty,K} = \max_{x \in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = x^2 - 1.876 * x + \sqrt{17}$. Pokaż że alternans w tym przypadku zawiera końce odcinka.

WSK: Funkcja $f - p$ jest ściśle wypukła dla dowolnego wielomianu liniowego p. Ile punktowy jest alternans dla wielomianu liniowego? Ile ekstremów WEWNĄTRZ odcinka może mieć funkcja $f - p$ dla p wielomianu liniowego?

Zadanie 27 (dodatkowe) Dla zbioru $K = [-1, 2]$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty,K} = \max_{x \in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = |x| - x + 4$. Pokaż że alternans w tym przypadku zawiera końce odcinka.

WSK: Gdzie funkcja postaci $|x| + p_1$ dla p_1 wielomianu liniowego może mieć ekstrema?

Zadanie 28 Pokaż że dla dodatniej wagi parzystej ω (tzn. $\omega(-x) = \omega(x)$) wielomian ortogonalny stopnia parzystego w iloczynie skalarnym typu $L^2_\omega(-a, a)$: $(f, g)_{L^2_\omega(-a,a)} := \int_{-a}^{a} \omega f g \, dx$ jest funkcją parzystą.

Zadanie 29 Niech $p_k(x) = x^k + \ldots$ ciąg wielomianów ortogonalnych z iloczynie skalarnym typu $L^2_\rho(-1, 1)$ z wagą parzystą tzn $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\rho(x) \, dx$ z $\rho(x) = \rho(-x)$. Pokaż, że $p_k(0) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy k nieparzyste.

WSK: Można pokazać że zera p_k leżą symetrycznie względem zera.

Zadanie 30 Wiedząc, że dla danej dodatniej wagi ω zachodzi:

$$\int_{-1}^{3} x^k \omega \, dx = \begin{cases} 0 & k \; nieparzyste \\ \frac{1}{k+1} & w.p.p. \end{cases} \qquad k = 0, \ldots, 8$$

- znajdź pierwsze cztery wielomiany ortogonalne P_k $k = 0, 1, 2, 3$ w iloczynie skalarnym $(f, g) := \int_{-1}^{3} \omega f g \, dx$.
- znajdź kwadraturę Gaussa obliczania $\int_{-1}^{3} f \omega \, dx$ rzędu cztery.

P_k k-ty wielomian ortogonalny gdy P_k stopnia k i $(P_k, w) = 0$ dla dowolnego w wielomianów st. $< k$.

WSK: W pierwszym podpunkcie można skorzystać z ortogonalizacji Gramma-Schmidta lub reguły tróczłonowej - por. skrypt wykładowcy. W drugim podpunkcie należy skorzystać z pierwszego.

Zadanie 31 Znajdź kwadraturę maksymalnego rzędu opartą o dwa węzły w tym jeden równy zero dla obliczania $\int_{-1}^{3} f\, dx$ tzn $Qf = Af(0) + Bf(\theta)$ dla $\theta \in [-1, 3]$.

Kwadratury - ostatni wykład

Zadanie 32 (dodatkowe) (o ile nie było na ćwiczeniach) Rozpatrzmy kwadraturę $P_{[a,b]}f = (b-a) * f((a+b)/2)$ dla $\int_a^b f\, dt$.

(a) Znajdź jej rząd.

(b) Pokaż oszacowania błędu

$$|\int_a^b f\, dt - P_{[a,b]}f| \leq c_j \|f^{(j)}\|_{\infty,[a,b]}(b-a)^{j+1}$$

dla $f \in C^j([a,b])$ dla $j = 1, 2$. (Tu c_j stałe niezależne od f ani a, b.) Przypadek $j = 2$ jest trudny.

(c) Konstruujemy kwadraturę złożoną prostokątów dla całki $\int_c^d f(x)\, dx$:

$$P_n f := \sum_{k=1}^{N} P_{[x_{k-1},x_k]}f = h \sum_{k=1}^{N} f(x_k - h/2)$$

dla $h = (d-c)/N$ i $x_k = c + k * h$. Pokaż, że

$$e_N = |\int_c^d f\, dt - P_N f| \leq d_j h^j \|f^{(j)}\|_{\infty,[c,d]}$$

dla $j = 1, 2$. (Tu d_j stałe niezależne od f ani N czy h.)

(d) Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} e_N = 0$ dla f dowolnej ciągłej (pochodna może nie istnieć).

Wsk: Trzeci podpunkt wynika z drugiego.