Zadania numerycznaj algebry liniowej

Zadania czy podpunkty oznaczone jako **dodatkowe/bardzo trudne** nie będą na kartkówce. Część z nich jest jako dodatkowo ponieważ są pozornie trudne z braku narzędzi, które pojawią się na wykładzie później, albo jest tylko dość mozolna obliczeniowo, czy dotyczą mniej ważnych zagadnień z wykładu.

Zadania na rozkłady LU, Choleskiego etc

Zadanie 1 Napisz w pseudokodzie algorytm rekurencyjny Choleskiego polegajacy na tym, że dzielimy macierz $A = A^T > 0$ na 4 bloki mniej więcej podobnych wielkości (przy parzystym wymiarze na równe) tzn.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

i szukamy macierzy górnotrójkątnej

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}$$

wyznaczając bloki R_{11}, R_{22} odpowienim wywołaniem rekurencyjnym tej funkcji. Powinnismy otrzymać czynnik g-trójkątny rokładu Choleskiego taki, że $A = R^T R$.

Zadanie 2 Znamy rozkład Choleskiego LDL^T macierzy $A = A^T > 0$ wymiaru $m \times m$. Jak możliwie tanio wyznaczyć element macierzy odwrotnej A^{-1} na pozycji $(1, 1)$, tzn. w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie.

Zadanie 3 (dodatkowe) Udowodnij, że dla macierzy $A = (a_{kl})$ silnie diagonalnie dominującej wierszowo tzn.

$$|a_{kk}| > \sum_{k \neq l} |a_{kl}| \; \forall k$$

eliminacje Gaussa tzn rozkład LU można wykonać bez wyboru elementu głównego (czyli bez permutacji kolumn czy wierszy).

Uwaga: Nie jest to trudne ale na tyle mozolne że na kartkówce nie będzie - ale TRZEBA to wiedzieć więc zachęcam do przeliczenia.

Zadanie 4 Niech

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 30 & 22 & 11 \\ 0 & 20 & 110 \end{pmatrix}$$

Znajdź metodą eliminacji Gaussa z wyborem elementu w kolumnie (częściowy wybór elementu głównego) macierze L, U, P gdzie L dolnotrójkątna z jedynkami na diagonali, U górnotrójkątna, P permutacji takie, że $PA = LU$.

Zadanie 5 Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Znajdź metodą eliminacji Gaussa dla macierzy symetrycznej dodatnio określonej macierze rozkładu Choleskiego tzn. L, D gdzie L dolnotrójkątna z jedynkami na diagonali, D diagonalna z dodatnimi elementami na diagonali, takie, że $A = LDL^T$. jak znając ten rozkład znaleźć czynnik rozkładu Choleskiego tzn. $\hat{L}$ macierz dolnotrójkątną taką, że $A = \hat{L}\hat{L}^T$?

Zadanie 6 Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Znajdź metodą Choleskiego czynnik rozkładu Choleskiego tzn. L macierz dolnotrójkątna z dodatnią przekątną taką, że $A = LL^T$. Czy istnieje rozkład Choleskiego macierzy

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}?$$

Zadanie 7 (dodatkowe) Rozpatrzmy macierz kwadratową wymiaru $(m+2) \times (m+2)$ dla $m \geq 2$ zapisaną w formie blokowej $A = \begin{pmatrix} C & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$, gdzie C dana nieosobliwa macierz $m \times m$, której czynniki rozkładu QR mamy dane (tzn znamy ortogonalną Q i górnotrójkątną R takie, że $C = QR$), B macierz $m \times 2$ maksymalnego rzędu.

(a) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu równań liniowych $A\vec{x} = \vec{f}$ możliwie niskim kosztem przy założeniu, że A nieosobliwa.

(b) Oszacuj ten koszt w terminach $C_1 m^p + O(m^{p-1})$ dla $p = 1, 2, 3, \ldots$ i C_1 stałej.

(c) Czy przy powyższych założeniach A jest nieosobliwa? Jeśli nie to podaj możliwy do sprawdzenia możliwie tanio warunek na C i B, aby A była nieosobliwa.

Zadanie 8 (dodatkowe) (Układ z macierzą trójdiagonalną) Rozpatrzmy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ i A macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko na 3 głównych przekątnych (diagonalach), tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa (rozkładu LU) bez wybory elementu głównego możliwie niskim koszcie względem n. Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej C i p naturalnego).

Wsk: Eliminujemy tylko poddiagonale - $n-1$ kroków o stałym koszcie - otrzymujemy rozkład LU z L, U 2-diagonalnymi.

Zadanie 9 (dodatkowe) (Układ z macierzą trójdiagonalną cykliczną) Rozpatrzmy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ i A macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko w rogach i na 3 głównych diagonalach tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ d_2 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa (rozkładu LU) bez wybory elementu głównego możliwie niskim koszcie względem n. Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej C i p naturalnego).

Wsk: Dla $d_1 = d_2 = 0$ algorytm jest znany , por. zad 8, zmodyfikuj ten algorytm dla macierzy cyklicznej.

Zadania z norm

Zadanie 10 Dla $C = 10^{30}$ znajdź takie $\alpha > 0$, że dla normy postaci $\|x\| = |x_1| + \alpha|x_2|$ w $\mathbb{R}^2$ zachodziło

$$\max_{x\neq 0} \frac{\|x\|_1}{\|x\|} = C \qquad \min_{x\neq 0} \frac{\|x\|_1}{\|x\|} = 1$$

tzn. by optymalne stałe równoważności były równe C i jeden odpowiednio.

Zadanie 11 Znajdź możliwe duże $c > 0$ i możliwie małe $C > 0$, że dla normy wektorowej w $\mathbb{R}^k$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^k j^{-1}|x_j|^2}$ zachodzi

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k \qquad c\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|_2.$$

Stałe c, C nazywamy stałymi równoważności między normą drugą a normą $\|\cdot\|$.

Zadanie 12 (dodatkowe) Dla wektora rzeczywistego $x = (x_i)_{i=1}^m$ definiujemy $|x| = (|x_i|)_{i=1}^m$. Dla norm p-tych zachodzi zawsze $\|x\|_p = \||x|\|_p$. Czy istnieje norma $\|\cdot\|$ w $\mathbb{R}^2$ dla której istnieje wektor x taki, że $\|x\| \neq \||x|\|$? Uzasadnij (w przypadku na tak podaj definicję normy).

Zadanie 13 (dodatkowe) Dla macierzy rzeczywistej $A = (a_{ij})_{i,j}$ $n \times n$ zdefiniujmy $|A| = (|a_{ij}|)_{ij}$.

(a) Czy dla normy Frobeniusa, maksimum i pierwszej zachodzi równość norm A i $|A|$? Wsk: Istnieją proste wzory na te normy zależne od współczynników macierzy.

(b) Pokaż np wprost z definicji normy indukowanej, że

$$\|A\|_2 \leq \||A|\|_2.$$

(c) Podaj kontrprzykład, że odwrotna nierówność nie zawsze zachodzi. Wsk: Można skonstruować kontrprzykład $A = A^T$ 2×2 korzystając ze wzoru: $\|A\|_2 = \rho(A)$ - dla $A = A^T$. Tu $\rho(A)$ moduł największej co do modułu wartości własnej A.

Zadanie 14 (dodatkowe) Pokaż że jeśli dla wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$ (x ma niezerowe składowe tzn. $x_k \neq 0$) zachodzi $\frac{|x_k - y_k|}{|x_k|} \leq \epsilon$

$$\frac{|x_k - y_k|}{|x_k|} \leq \epsilon \qquad k = 1, \dots, n, \tag{3.1}$$

to

$$\frac{\|x_k - y_k\|_p}{\|x_k\|_p} \leq \epsilon \qquad p = 1, 2, \infty \tag{3.2}$$

Zadanie 15 (dodatkowe) Czy stwierdzenie odwrotne do poprzedniego zadania jest prawdziwe np. dla $p = \infty$ czy z tego że zachodzi (3.2) zachodzi (3.1)? Jeśli nie zachodzi proszę podać kontrprzykład np. dla $n = 2$.

Zadanie 16 (dodatkowe) Dla macierzy A wymiaru 10×10 z Zadania 9, patrz poniżej, dla $a_k = d_k = -b_k = -c_k = 1$ dla wszystkich odpowiednich k, oblicz indukowaną normę maksimum tzn. $\|A\|_\infty$ i wyznacz taki wektor x różny od zera, że $\|x\|_\infty \|A\|_\infty = \|Ax\|_\infty$. Czy wektor x jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do przemnożenia przez -1)?

Zadanie 17 (dodatkowe) Dla danego $\epsilon > 0$ niech

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 & 0 \\ 1 & \epsilon & 1 \\ 0 & 1 & \epsilon \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{cond}_2(A_\epsilon) = \infty.$$

Wsk: Dla $A = A^T$ $\|A\|_2 = \rho(A)$ promień spektralny (max z modułu z wartości własnych) - zauważmy że $A = \epsilon I + A_0$ dla

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

więc $\lambda(A_\epsilon) = \epsilon + \lambda(A_0)$, tu $\lambda(C)$ oznacza zbiór wartości własnych macierzy C.

Zadanie 18 (dodatkowe) Mamy 2 układy równań liniowych: $Ax = b$ i drugi z zaburzoną macierzą A tzn

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{A}x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.98 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Policz błąd bezwzględny:$\|x_1 - x_2\|_\infty$, względny: $\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$ oraz współczynniki uwarunkowania A i $\hat{A}$ w normie maksimum.

Zadania na LZNK

Zadanie 19 Dla danych m różnych punktów (x_k, y_k) określamy krzywą $y - a * x^4 - bx^2 - c = 0$ (a, b, c parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^{m} |y_k - a * x_k^4 - bx_k^2 - c|^2 = \min_{\hat{a},\hat{b},\hat{c}} \sum_{k=1}^{m} |y_k - \hat{a} * x_k^4 - \hat{b} * x_k^2 - \hat{c}|^2$$

Sformułuj zadanie znalezienia parametrów takiej krzywej jako liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) dla danych m punktów. Określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to zadania miało jednoznaczne rozwiązanie dla $m \geq 0$. Wyznacz koszt rozwiązania tego LZNK zadania przy pomocy algorytmu Householdera względem m tzn jako $C_H m^p + O(m^{p-1})$ dla C_H stałej dodatniej i p wykładnika naturalnego.

Zadanie 20 Niech A macierz $n+1 \times n$ kolumnami regularna trójdiagonalna tzn. wszystkie elementy takie, że $|i-j| > 1$ są równe zero. Jak rozwiązać LZNK z taką macierzą kosztem rzędu $C_1 n + C_2$ dla C_1, C_2 stałych dodatnich z użyciem rozkładu QR uzyskanym z wykorzystaniem macierzy Householdera.

Zadanie 21 (dodatkowe) Rozpatrzmy macierz A wymiaru $(n+1) \times n$ taką że jeśli zapisując blokowo mamy:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \vec{b}_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

dla A_1 macierzy $n \times (n-1)$ i wektora $\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ z b_2 różnym od zera i $\vec{b}_1$ wektorem wymiaru n. Znamy macierze: górnotrójkątną max rzędu R wymiaru $n \times (n-1)$ i Q_1 ortogonalną wymiaru $n \times n$ że

$$A_1 = Q_1 R.$$

oraz potrafimy policzyć iloczyn $Q_1 x$ lub $Q_1^T x$ kosztem liniowym tzn. Cn dla pewnej stałej C. Czy macierz A jest kolumnami regularna? A jeśli tak to jak możliwie tanio znaleźć rozkład QR macierzy A z Q ortogonalną i R górnotrójkątną? Podaj koszt jako funkcję postaci $C_2 n^p + O(n^{p-1})$ dla najniższego możliwego p naturalnego i jakiejś stałej C_2. Można rozważyć dwa przypadki - pierwszy kiedy explicite wyliczamy Q a drugi gdy otrzymujemy Q jako iloczyn odpowiednio dobranych macierzy ortogonalnych.

Zadanie 22 Rozpatrzmy rodzinę LZNK z macierzą A_α i wektorem f takich, że:

$$H_2 * H_1 * A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

gdzie H_k jest macierzą Householdera z odpowiednim wektorem Householdera w_k: $w_1 = (1,1,1,1)^T$ i $w_2 = (0,-2,0,0)^T$.

(a) Określ dla jakich wartości α to LZNK ma jednoznaczne rozwiązanie.

(b) Policz pierwsze kolumny macierzy A_α dla α równego 8 i $-\sqrt{7}/23$.

(c) Dla jakiego α błąd rozwiązania LZNK $\|A_\alpha x_\alpha^* - f\|_2$ jest najmniejszy? Tu x_α^* to rozwiązania LZNK z A_α i f.

Zadanie 23 (dodatkowe) bo za długie na kartkówke... Rozważmy zadanie: Dla danych m punktów $z_k \in R^3$ i danego niezerowego wektora $\vec{n} \in R^3$ znajdź wektor $x \in R^3$ należący do płaszczyzny prostopadłej do wektora $\vec{n}$ tzn. zadanej wzorem $P_\alpha = \{x : x^T \vec{n} = \alpha\}$ taki, że suma kwadratów odległości

$$\sum_{k=1}^{M} dist(z_k, P_\alpha)^2$$

jest minimalna. Tu $dist(z, P_\alpha) = \min_{y \in P_\alpha} \|z - y\|_2$.

(a) Pokaż, że $dist(z, P_\alpha) = |z^T\vec{n} - \alpha| = |(z-x)^T\vec{n}|$ dla dowolnego $x \in P_\alpha$.

(b) Sformułuj to zadanie jako LZNK z A $m \times 3$ i wektorem f $m \times 1$.

(c) Pokaż, że to LZNK nie jest regularne i zaproponuj metodę znalezienia rozwiązania o minimalnej normie drugiej (to klasyczny warunek by ujednoznacznić LZNK) za pomocą przekształceń Householdera. Oszacuj koszt jako $O(m^p)$ dla możliwie małego p naturalnego. Czy ta metoda pozwoli znaleźć też bazę przestrzeni zerowej macierzy A?

(d) Przeformułuj to zadanie na znalezienie P_α czyli de facto α i sformułuj jako regularne LZNK z macierzą niezerową $m \times 1$.

Można założyć, że $\|\vec{n}\|_2 = 1$ - to trochę uprości wzory.

Zadanie 24 (zadanie z kolokwium 2017/18 - preformułowane) Mamy macierz A $m \times n$ $n \leq m$ i macierze Q, V ortogonalne, oraz C 2-diagonalną górno-trójkątną o niezerowej głownej diagonali, takie, że

$$A = QCV$$

Jak za pomocą macierzy Householdera rozwiązać LZNK z macierzą A i wektorem prawej strony b możliwie tanio? Czy rozwiązanie tego LZNK jest jednoznaczne?

Zadania na metody iteracyjne rozwiązywania równań liniowych

Zadanie 25 (zadanie kolokwium 2017/18) Dla układu równań liniowych zapisanego blokowo jako

$$\begin{array}{rcrcl} Ax^* & + & B^Ty^* & = & b_1 \\ Bx^* & + & y^* & = & b_2 \end{array}$$

z $A = A^T > 0$ wymiaru $n \times n$ i B wymiaru $m \times n$ zastosowano następującą metodę iteracyjną:

$$\begin{array}{rcrcl} Ax_{k+1} & + & B^Ty_k & = & b_1 \\ Bx_{k+1} & + & y_{k+1} & = & b_2 \end{array}$$

pokaż że jeśli

$$\|BA^{-1}B^T\|_2 \leq \rho < 1.$$

to metoda zbieżna w normie $\|\cdot\|_2$ dla dowolnych wektorów startowych x_0, y_0.

Zadanie 26 (dodatkowe) (Blokowa metoda Jakobiego) Dla układu równań liniowych zapisanego blokowo jako

$$\begin{array}{rcrcl} A_1x^* & + & B_1y^* & = & b_1 \\ B_2x^* & + & A_2y^* & = & b_2 \end{array}$$

z A_k, B_k wymiaru $n \times n$ zastosowano następującą metodę iteracyjną:

$$\begin{array}{rcrcl} A_1x_{n+1} & + & B_1y_n & = & b_1 \\ B_2x_n & + & A_2y_{n+1} & = & b_2 \end{array}$$

pokaż że przy założeniu, że A_k^{-1} odwracalne i dodatkowo zachodzi

$$\max_k \|A_k^{-1}B_k\|_\infty \leq \rho < 1.$$

mamy, że metoda zbieżna w normie $\|\cdot\|_\infty$ dla dowolnych wektorów startowych x_0, y_0 i dodatkowo zachodzi oszacowanie

$$\|(x_k, y_k)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty \leq \rho^k \|(x_0, y_0)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty.$$

Zadanie 27 Niech $A = A^T > 0$ taka że jej wartości własne są w przedziale $[1, 10]$. Znajdź τ takie aby metoda Richardsona: $x^{k+1} = x^k - \tau(Ax^k - b)$ była zbieżna do x^* rozwiązania $Ax^* = b$. Oszacuj szybkość zbieżności w normie $\|\cdot\|_2$. Wyznacz wartości parametru dla których oszacowanie szybkości zbieżności w normie drugiej będzie najlepsze.

Zadanie 28 (dodatkowe) Powtórz poprzednie zadanie ale w normie energetycznej $\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$. Wsk: Pokaż że $\|I - \tau A\|_A = \|I - \tau A\|_2$ korzystając z istnienia $A^{1/2}$ takiej, że $A^{1/2}A^{1/2} = A$.

Zadanie 29 (dodatkowe) Rozpatrzmy układ liniowy $Ax = b$ dla $A = A^T > 0$ i C nieosobliwej takiej że $cond_2(C^T AC) \leq 2$. Stosujemy m. Richardsona z optymalnym parametrem do $C^T ACy = C^T b$ otrzymując ciąg y_k zbieżny do y. Pokaż że przyjmując $x_k = Cy_k$ dostaniemy wzory na x_k wymagające tylko mnożenia przez C^T, C i A i dodawania wektorów. Pokaż ze norma błędu $||x_k - x||_A = ||y_k - y||_{C^T AC}$, zastosuj do oszacowania szybkości zbieżności błędu w tej normie.

Zadanie 30 Niech $A = A^T > 0$ taka że jej wartości własne to $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Chcemy rozwiązać układ $Ax^* = b$ przy pomocy metody Richardsona i znamy x^0 takie że $x^0 - x^*$ jest ortogonalne do wektorów własnych dla wartości własnych $(10, 9, 8, 7, 6, 5)$. Czy dla $\tau = 1/3$ metoda Richardsona: $x^{k+1} = x^k - \tau(Ax^k - b)$ jest zbieżna do x^*? Oszacuj szybkość zbieżności w normie $\|\cdot\|_2$. Wyznacz wartości parametru dla których szybkość zbieżności w normie drugiej będzie największa przy taki założeniu.

Zadanie 31 (dodatkowe) Niech A nieosobliwa. Do rozwiązania układu $A^T Ax = A^T b$ zastosowano następującą metodę iteracyjną:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k A^T r^k \qquad r^k = b - Ax^k$$

dla α_k minimalizującego funkcję $g(\tau) = \|x^k + \tau A^T r^k - x^*\|_2$. Oblicz wzór na α_k ,sprawdź czy metoda poprawnie określona tzn. czy α_k można policzyć bez znajomości x^*. Czy metoda jest zbieżna dla dowolnego x^0 i czy można oszacować $\|x^k - x^*\|_2 / \|x^0 - x^*\|_2$.

Zadanie 32 (dodatkowe) Czy istnieje wartość parametru τ dla którego metoda Richardsona będzie zbieżna (dla dowolnego x_0) dla układu równań z macierzą:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Zadanie 33 (dodatkowe) Dla jakich wartości parametru s nastepująca metoda iteracyjna będzie zbieżna:

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

dla g_1, g_2 ustalonych wartości.

Zadanie 34 Rozpatrzmy macierz symetryczną $A \in \mathbb{R}^{100,100}$ o wartościach własnych $\{1, \ldots, 100\}$ z odpowiednimi wektorami własnymi q_k, tj. $Aq_k = k * q_k$. Chcemy znaleźć rozwiązanie układu równań $Ax^* = b$. Znamy x_0 takie, że $x_0 - x^* = \sum_{k=1}^{15} a_k q_k$ dla a_k współczynników. Określ czy metoda Richardsona będzie zbieżna dla nastepująch wartości parametru τ:

- $\tau = 0.01$
- $\tau = 1$

- $\tau = 0.1$.

W przypadku zbieżności oszacuj błąd $\frac{\|x^*-x_2\|_2}{\|x^*-x_0\|_2}$ dla x_k k-tej iteracji metody.

Zadanie 35 Niech $A = (a_{kl})_{k,l=1}^n$ macierz symetryczna i nieosobliwa o wartościach własnych należących do przedziału $[-1, 2]$. Do rozwiązania układu równań liniowych $Bx^* = b$ z macierzą $B = I + A * A$ zastosowano metodę iteracyjną Richardsona z parametrem $\tau = 1/8$ Określ czy metoda zbiegnie do x^*i w przypadku zbieżności oszacuj odpowiedni błąd:

$$\frac{\|x^* - x_9^{Rich}\|_B}{\|x^* - x_0^{Rich}\|_B},$$

gdzie x_9^{Rich} dziewiąta iteracja Richardsona

Zadanie własne

Zadanie 36 Dla macierzy $A = [3, -1; -1, 3]$ zastosowano metodę potęgową (z normowaniem przez normę drugą tzn. $\|x_k\|_2 = 1$) z $x_0 = [1; 0]$. Czy otrzymany ciąg lub podciąg wektorów x_k zbiegnie? Jeśli tak to policz odpowiednią granicę. Czy istnieje granica $r_k = x_k^T Ax_k/\|x_k\|_2^2$? (notacja octave'a - ; oddziela wiersze)

Zadanie 37 Dla macierzy $A = [10, -1; -1, 10]$ zastosowano odwrotną metodę potęgową z parametrem 8 (z normowaniem przez normę drugą tzn. $\|x_k\|_2 = 1$) z $x_0 = [1; 0]$. Czy otrzymany ciąg lub podciąg wektorów x_k zbiegnie? Jeśli tak to policz odpowiednią granicę. Czy istnieje granica $r_k = x_k^T Ax_k/\|x_k\|_2^2$? (notacja octave'a - ; oddziela wiersze)

Zadanie 38 Dla A nieosobliwej takiej, że dla ustalonej liczby b macierz $A - b * I$ jest nieosobliwa i spełnia $A - b * I = QZ$ dla Q ortogonalnej, Z nieosobliwej. Definiujemy macierz

$$C := ZQ + b * I$$

Czy C jest podobna do macierzy A, tzn czy istnieje taka macierz nieosobliwa W, że $WCW^{-1} = A$? Czy znając Z, Q, b możemy macierz W wyznaczyć?

Zadanie 39 (dodatkowe) Dla $A = [-7, 1; -1, -7]$ zastosowano następujący algorytm: $Z_0 = I$ i dla $k = 0, 1, \ldots$ znajdź Z_{k+1} ortogonalną i R_k górnotrójkątną takie, że $Z_{k+1}R_{k+1} = AZ_k$.

- Policz wartości i wektory własne A.
- Pokaż że ciąg pierwszych/drugich kolumn macierzy Z_k mają podciągi zbieżne do wektorów własnych macierzy A.
- Pokaż że macierze R_k zbiegną do macierzy diagonalnej - wyznacz jej wartości na diagonali.
- przyjmując $Q_{k+1} := Z_k^T Z_{k+1}$ pokaż, że $Q_{k+1}R_{k+1} = Z_k^T AZ_k := A_k$ oraz $R_{k+1}Q_{k+1} = Z_{k+1}^T AZ_{k+1} = A_{k+1}$.
- Pokaż, że algorytm : $A_0 = A$ dla $k \geq 0$ policz rozkład QR macierzy $A_k = Q_{k+1}R_{k+1}$ nastepnie policz $A_{k+1} = R_{k+1}Q_{k+1}$ jest równoważny wyjściowemu (przyjmując definicje Z_k, Q_k, A_k z punktów powyżej).

Zadanie 40 Dla macierzy $H + \alpha I$ z macierzą Householdera H $M \times M$, zastosowano metodę potęgową z x_0 o normie drugiej równej jeden .

Dla jakich α i x_0 wektorów startowych metoda zbiegnie (lub będzie miała podciąg zbieżny?) i ewentualnie do czego te podciągi zbiegną.

Jak zaimplementować 1 iteracje tej metody możliwie tanio?

Jak mając tylko procedurę mnożenia przez macierz Householdera a nie mając fizycznie tej macierzy (i nie tworząc jej) wyznaczyć wektor Householdera tej macierzy z użyciem metody potęgowej zastosowanej do $H + \alpha I$?

Zadania dodatkowe - wszystkie oznaczone jako trudne

Zadanie 41 (bardzo trudne) Dla macierzy nieosobliwej $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ wymiaru $m \times m$ o stałych przekątnych, tzn. $a_{ij} = c_k$ dla $j - i = k$, zaproponuj algorytm rozwiązywania układu $A\vec{x} = \vec{b}$ kosztem kwadratowym.

Zadanie 42 (dodatkowe) (metody bezpośrenie - Blokowe macierze) Mamy układ równań liniowych zapisany blokowo jako

$$\begin{array}{rcrcl} A_1 x^* & + & B_1 y^* & = & b_1 \\ & & A_2 x^* & = & b_2 \end{array}$$

z A_k, B_k wymiaru $n \times n$. Zakładamy że macierze A_k nieosobliwe i ż potrafimy rozwiązać układ $A_k y = f_k$ dla dowolnego wektora f_k kosztem $O(n^2)$. Zaproponuj metodę znalezienia rozwiązania wyjściowego układu kosztem $O(n^2)$.

Zadanie 43 (dodatkowe) (Blokowa metoda Gaussa-Seidla dla macierzy dolnotrójkątnej) Dla układu równań liniowych zapisanego blokowo jako

$$\begin{array}{rcrcl} A_1 x^* & + & B_1 y^* & = & b_1 \\ B_2 x^* & + & A_2 y^* & = & b_2 \end{array}$$

z A_k, B_k wymiaru $n \times n$ zastosowano następującą metodę iteracyjną:

$$\begin{array}{rcrcl} A_1 x_{n+1} & + & B_1 y_n & = & b_1 \\ B_2 x_{n+1} & + & A_2 y_{n+1} & = & b_2 \end{array}$$

pokaż że przy założeniu, że A_k^{-1} odwracalne i

$$\max_k \|A_k^{-1} B_k\|_\infty \leq \rho < 1.$$

zachodzi, że metoda zbieżna w normie $\| \cdot \|_\infty$ dla dowolnych wektorów startowych x_0, y_0 i dodatkowo widzimy oszacowanie

$$\|(x_k, y_k)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty \leq \rho^k \|(x_0, y_0)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty.$$