Drugi projekt z labu

Projekt składa się z dwóch części:

1. napisania funkcji dwaww() znajdującej 2 wektory ortonormalne własne dla macierzy symetrycznej A $m \times m$ następującym algorytmem: bierzemy macierz Z_0 $m \times 2$ o kolumnach ortonormalnych np $Z_0 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ lub możemy wylosować 2 wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ i zastosować ortogonalizację Gramma Schmidta dla 2 wektorów otrzymując 2 wektory, które tworzą macierz o kolumnach ortonormalnych.

   Nasz algorytm wygląda następująco: Powtarzać aż do zbieżności dla $k = 0, 1, \ldots$:

   (a) Mnożymy
   $$W_{k+1} = AZ_k,$$

   (b) ortonormalizujemy kolumny macierzy W_{k+1} algorytmem ortogonalizacji Gramma-Schmidta otrzymując macierz Z_{k+1} o ortonormalnych kolumnach ($Z_{k+1}^T Z_{k+1} = I_{2\times 2}$) i macierz g-trójkątną R_{k+1} 2×2 takie, że:
   $$Z_{k+1}R_{k+1} = W_{k+1}$$

   Jeśli macierz A ma wartości własne $\{\lambda_k\}_k$ takie, że
   $$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_m|,$$
   to Z_k zbiegnie do macierzy z kolumnami wektorami własnymi dla λ_1, λ_2. W szczególności $B_k = Z_k^T AZ_k$ zbiegnie do macierzy diagonalnej $diag(\lambda_1, \lambda_2)$, więc za warunek stopu można wziąć warunek, że element macierzy symetrycznej B_k pozadiagonalą na pozycji $(2, 1)$ jest mniejszy od zadanej tolerancji TOL, co oznacza, że B_k blisko diagonalnej. Dodatkowo należy ustalić maksymalną ilość iteracji metody, w razie jej przekroczenia funkcja powinna wypisać ostrzeżenie.

   Parametrem funkcji:

   ```
   function [Z,D]=dwaww(A)
   % kod funkcji
   end
   ```

   ma być: macierz (symetryczna) A,

   Funkcja ma zwracać macierz Z czyli przybliżenie macierzy 2-kolumnowej z unormowanymi wektorami własnymi jako kolumny oraz wektor D z diagonalą $Z^T AZ$ czyli przybliżeniem 2 największych w module wartości własnych.

2. **Testy**:

   (a) **Test czy metoda działa** Przetestować na kilku prostych przykładach dla macierzy symetrycznych $m \times m$ - np. dla $m = 2, 3, 4, 10, 20$ ze znanymi wartościami własnymi np. $A = [2, 1; 1, 2]$ lub losowymi symetrycznymi (porównać z wynikiem funkcji **eig**(A) i sprawdzić czy $\|A*Z - Z*D\|_1$ jest zero tzn czy kolumny Z to wektory własne dla wartości na diagonali D?)

   (b) **Test dla trudnych/łatwych przykładów** wziąć macierz o znanych wartościach własnych ale takich że maksymalna jest dużo większa w module od drugiej i trzeciej np. $-100, 50, 10, 9, \ldots, 1$ albo $10.1, 10, 9.5, 8, \ldots, 1$ albo $100, 10, 9.5, 8, \ldots, 1$.

(c) **Test dla złych macierzy** Wziąć macierz symetryczną (nie diagonalną!) o wartościach własnych np. $100, -100, 9, 8, .., 1$ lub $100, 9, -9, 8, 7, \ldots, 1$- iteracja albo nie zbiegnie albo zbiegnie nie do właściwej macierzy - jak wychwycić taką sytuację?

Wskazówka: Można wygenerować losową macierz ortogonalną Q i D diagonalną wziąć $A = QDQ^T$. Wtedy A ma wartości własne z D z wektorami własnymi będących kolumnami Q.