Seria ostatnia - równania nieliniowe

Oznaczenie : aew oznacza $a * 10^w$ dla a liczby rzeczywistej z zakresu $[0, 10]$ postaci $d.dddd$ gdzie d to cyfra $0, \ldots, 9$, a w wykładnik czyli liczba całkowita, np $1.234567e5$ oznacza 123456.7 a $0.1234e-3$ oznacza 0.0001234.

Zadania czy podpunkty oznaczone jako **trudne** nie będą na kartkówce. Część z nich jest trudna pozornie z braku narzędzi które pojawią się na wykładzie później.

Metoda generującej ciąg x_n zbieżny do x^* rozwiązania ma rząd zbieżności (wykładnik zbieżności) równy $p \geq 1$ jeśli istnieje $C \geq 0$ i N takie, że jeśli $n \geq N$ to

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p \qquad p > 1$$

w przypadku $p = 1$ żądamy dodatkowo by $C < 1$ i wtedy mówimy o zbieżności liniowej. Przypadek $p = 2$ określamy jako zbieżność kwadratową a $p = 3$ kubiczną.

Zadanie 1 (trudne)

- Pokaż, że metoda iteracyjna $x_{k+1} = F(x_k)$ spełniająca $F \in C^p$ na otoczeniu x^*, $F(x^*) = x^*$ i $F^{(j)}(x^*) = 0; j = 1, \ldots, p-1$ ($p > 1$)jest zbieżna lokalnie i ma rząd zbieżności p.
- Określ rząd zbieżności metody Newtona korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0$ i $f \in C^\infty$.
- Określ rząd zbieżności metody Newtona korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0 = f''(x^*)$ i $f \in C^\infty$.
- Określ rząd zbieżności metody cięciw $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_0)$ korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0$ i $f \in C^\infty$.
- Określ rząd zbieżności metody Halleya to metoda Newtona zastosowana do

  $$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}},$$

  korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0$ i i $f \in C^\infty$.

Zadanie 2 Aby znaleźć pierwiastek trzeciego stopnia z 5 czyli $x^* = 5^{1/3}$, dla równania $f(x) = x^3 - 5 = 0$ z rozwiązaniem $x^* = 5^{1/3}$ zastosowano metodę Newtona.

- Pokaż, że dla dowolnego $x_0 > 0$ zachodzi $x_k \geq x^*$ dla $k > 0$.
- udowodnij, że dla dowolnego $x_0 > 0$ metoda zbiegnie do x^*.
- Policz granice $\frac{e_{n+1}}{e_n^2}$ (o ile istnieje) dla $e_n = x_n - x^*$.
- Weźmy $x_0 > x^*$ czy wtedy prawdziwe jest oszacowanie $e_{n+1} \leq Le_n$ dla $n \geq 0$ ze stałą $L < 1$?

Zadanie 3 (trudne) Do rozwiązania przybliżonego równań $f(x) = x * \sin(x-3)$ i $g(x) = (x-3)^2 \exp(x)$ których rozwiązaniem jest $x^* = 3$ zastosowano metodę Newtona. Czy w obu przypadkach metoda będzie zbieżna lokalnie (dla x_0 przybliżenia startowego dostatecznie bliskiego x^*)? Jeśli tak to określ wykładnik (rząd) zbieżności w obu przypadkach.

Zadanie 4 Pokaż, że równanie $x^* - 0.2 * \sin(x^*) = 6$ ma dokładnie jedno rozwiązanie i że następująca metoda iteracyjna $x_n = 0.2 * \sin(x_{n-1}) + 6$ zbiegnie dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ do rozwiązania tego równania. Oszacuj możliwie dobrze błąd $|x_9 - x^*|$ dla $x_0 = 6$.

Zadanie 5 Do rozwiązania zadania $f(x^*) = 0$ dla $f(x) = \exp(x) - a$ dla ustalonego $a \in (1, 4)$ zastosowano metodę iteracyjną, która w 9-tej iteracji zwróciła $x_9 > 0$ takie że mamy $|f(x_9)| = 1e - 7$. Czy na tej podstawie możemy stwierdzić, że $|x_9 - x^*| \leq 1e - 6$? Uzasadnić.

WSK: Skorzystać z tw. o wartości średniej i tego że $f(x^*) = 0$.

Zadanie 6 (trudne) Rozważamy funkcję

$$f(x) = \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + x - 1.$$

(a) Pokaż, że f ma jedyne miejsce zerowe r w przedziale $(0, 1)$.

(b) Pokaż, że gdy do przybliżonego wyznaczenia r stosujemy metodę Newtona. dla dowolnego punktu startowego $x_0 \in (0, 1)$ otrzymamy ciąg przybliżeń x_n zbieżny do r.

(c) Pokaż, że zbieżność jest dokładnie kwadratowa.

Zadanie 7 Do rozwiązania $f(x) = (x - 2)^2 + \exp(x - 2) - 2$ zastosowano metodę Newtona.

(a) pokaż że istnieje dokłądnie jedno rozwiązanie $x^* \in [2, 3]$ tzn $f(x^*) = 0$.

(b) pokaż że metoda Newtona jest lokalnie zbieżna dla rozwiązania równania $x^* \in [2, 3]$. określ rząd zbieżności (wykładnik zbieżności).

(c) czy dla dowolnego $x_0 > x^*$ metoda Newtona będzie zbieżna? Uzasadnij.
WSK: pokaż że wtedy wszystkie iteracje metody Newtona $x_n > x^*$ a potem że $x_n - x^*$ jest ciągiem malejącym czyli zbieżnym (dlaczego?).

Zadanie 8 Jacek i Placek zaimplementowali metodę Newtona i zastosowali ją Jacek do

$$f_1(x) = (x - 2)^2 * (\exp(x) + 1)$$

otrzymując ciąg (x_n) a Placek do

$$f_2(y) = y * \sin(2 * y - 4)$$

otrzymując (y_n) w obu przypadkach itercje metody Newtona dla $x_0 = y_0 \approx 2$ zbiegły do rozwiązania $x^* = 2$. Kilka kolejnych iteracji oraz wartości błedu są w poniższej tabelce. Określ czy któryś nie ma błędu w implementacji na bazie tych wyników.

nr iter	*metoda*	*Jacka dla* f_1	*metoda*	*Placka dla* f_2
n	x_n	$\|x_n - 2\|$	y_n	$\|y_n - 2\|$
0	$1.800000e + 00$	$2.000000e - 01$	$1.800000e + 00$	$2.000000e - 01$
1	$1.909387e + 00$	$9.061296e - 02$	$2.039527e + 00$	$3.952731e - 02$
		....		
10	$1.999837e + 00$	$1.633413e - 04$	$1.999995e + 00$	$4.976425e - 06$
11	$1.999918e + 00$	$8.166476e - 05$	$2.000002e + 00$	$1.825667e - 06$
12	$1.999959e + 00$	$4.083091e - 05$	$1.999999e + 00$	$6.697784e - 07$
13	$1.999980e + 00$	$2.041509e - 05$	$2.000000e + 00$	$2.457190e - 07$
14	$1.999990e + 00$	$1.020745e - 05$	$2.000000e + 00$	$9.014612e - 08$
15	$1.999995e + 00$	$5.103703e - 06$	$2.000000e + 00$	$3.307159e - 08$
16	$1.999997e + 00$	$2.551846e - 06$	$2.000000e + 00$	$1.213286e - 08$
17	$1.999999e + 00$	$1.275922e - 06$	$2.000000e + 00$	$4.451142e - 09$

Określ czy któryś nie ma błędu w implementacji- uzasadnij.