

Seria druga- interpolacja, splajny, aproksymacja w normie Hilbertowskiej, jednostajnej, kwadratury

Zadanie 1 Dla danej tabelki

x_k	-1	0	1
$f(x_k)$	-2	0	2
$f'(x_k)$		1	
$f''(x_k)$		0	

znajdź za pomocą algorytmu różnic dzielonych współczynniki wielomianu stopnia ≤ 4 w bazie Newtona związanej z węzłami i ich krotnościami i kolejnością z tabelki. (Dwa węzły jednokrotne i jeden trzykrotny).

Zadanie 2 Niech

$$\begin{aligned}p_0(x) &= 1 \\p_1(x) &= (x - 1) \\p_2(x) &= (x - 1)(x - 2) \\p_3(x) &= (x - 1)(x - 2)(x - 3)\end{aligned}$$

oraz $w(x) = p_0(x) + p_1(x) - 2p_2(x) + 3p_3(x)$. Oblicz różnicę dzieloną $w[2, 3, 4]$.

Zadanie 3 Czy możemy stwierdzić że $\|f - w\|_{\infty, [-1, 1]} \leq 0.1$ dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ i $w(x)$ wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia co najwyżej dwa takiego, że $\sin(j) = w(j)$ dla $j = -1, 0, 1$.

Zadanie 4 (pierwszy podpunkt - trudne)

- Pokaż, że $\|\prod_{k=0}^N (x - x_k)\|_{\infty, [a, b]} \leq 0.25 N! h^{N+1}$ dla $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ i $h = \max_{k=1, \dots, N} |x_k - x_{k-1}|$.
- Korzystając z tego wzoru oszacuj błąd $e_{k,3} := \|f_k - w_{k,3}\|_{\infty, [0, 10]}$ dla $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2 = \log(1 + x)$ i $w_{k,N}$ wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia co najwyżej N interpolującego funkcję f_k w $N + 1$ węzłach równoodległych.

Zadanie 5 Oszacuj błąd $e_{k,N} := \|f_k - w_{k,N}\|_{\infty, [0, 10]}$ dla $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2 = \log(1 + x)$ i $w_{k,N}$ wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia co najwyżej N interpolującego funkcję f_k w $N + 1$ węzłach Czebyszewa. Czy w obu przypadkach zachodzi: $e_{k,N} \rightarrow 0$ dla $N \rightarrow \infty$?

Zadanie 6 Rozpatrzmy w funkcje na $[-1, 2]$ taką, że w obcięte do $[-1, 0]$ jest wielomianem liniowym, w na $[0, 2]$ jest wielomianem kwadratowym (tzn stopnia co najwyżej dwa) oraz $w(k) = f(k)$ dla $k = -1, 0, 1, 2$. Czy taka funkcja w jest wyznaczona jednoznacznie? Oszacuj możliwie dokładnie błąd $e := \|f - w\|_{\infty, [-1, 2]}$ dla $f(x) = \sin(4\pi * x)$.

Zadanie 7 Dla danych różnych węzłów $\{x_k\}_{k=0}^n \subset [a, b]$ niech $\{l_k\}_{k=0}^n$ będzie bazą Lagrange'a \mathcal{P}_n a dla tych węzłów, i niech $L_n f$ wielomian interpolujący daną funkcję ciągłą $f \in C([a, b])$ w tych węzłach. Pokaż, że

$$\|L_n f\|_{\infty, [a, b]} \leq \left(\sum_{k=0}^n \|l_k\|_{\infty, [a, b]} \right) \|f\|_{\infty, [a, b]}.$$

Zadanie 8 (trudne) Pokaż, że dla $k + 1$ różnych punktów różnica dzielona spełnia:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k (x_j - x_i)}$$

Zadanie 9 (trudne) Niech $(x_k)_{k=0}^n$ będą różnymi węzłami. Znajdź współczynniki wielomianu

$$\sum_{k=0}^n x^k \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)}$$

w bazie potęgowej $(1, x, \dots, x^n)$ dla $n = 10$.

Zadanie 10 Na odcinku $[0, 10]$ mamy węzły równo-odległe: $\{x_k\}_{k=0}^N$ z $x_k = k * h$ dla $h = \frac{10}{N}$. Dla danej funkcji $f(x) = \sin(4 * x)$ szukamy funkcję ciągłą $s \in C([a, b])$ taką, że na każdym pod-odcinku (x_k, x_{k+1}) ta funkcja s jest wielomianem stopnia co najwyżej dwa i spełnia warunki interpolacyjne:

$$\begin{aligned} s(x_k) &= f(x_k) & k = 0, \dots, N \\ s\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) &= f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) & k = 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

- (a) Czy taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie?
 (b) Wyznacz możliwie małą stałą $C > 0$ niezależną od h taką, że

$$\|f - s\|_{\infty, [0, 10]} \leq C h^3.$$

Zadanie 11 (trudne) Na odcinku $[a, b]$ mamy zadane węzły : $a = x_0 < \dots < x_N = b$. Niech s splajn kubiczny na tym podziale odcinka (czyli funkcja w $C^2([a, b])$ na pod-odcinkach będąca wielomianem kubicznym) naturalny tzn. $s''(a) = s''(b) = 0$ i $f \in C^2([a, b])$ taka, że

$$f(x_k) = 0 \quad k = 0, \dots, N.$$

Pokaż, że

$$\int_a^b f^{(2)} s^{(2)} dx = 0.$$

Zadanie 12 Rozpatrzmy odcinek $[a, b] = [-2, 2]$ z węzłami $x_k = -2, -1, 0, 1, 2$ dla $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Czy istnieje splajn kubiczny naturalny s taki, że w węzłach przyjmuje wartości kolejno: $0, 2, 1, 2, 0$ i równocześnie s obcięte do odcinka $[x_2, x_3] = [0, 1]$ jest równe $1 + x^2$. Splajn kubiczny jest naturalny gdy $s''(a) = s''(b) = 0$.

WSK: można policzyć współczynniki splajnu w jakiejś bazie wielomianów kubicznych na $[x_3, x_4] = [1, 2]$ i sprawdzić czy wtedy druga pochodna jest równa zero w $x_4 = b = 2$.

Zadanie 13 (trudne) Znajdź wzory na regułę tróczłonową $P_{n+1} = a_n x P_n + b_n P_n + c_n P_{n-1}$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ dla wielomianów ortonormalnych P_n w $(f, g)_{L^2_\rho(a, b)}$. Wielomiany ortonormalne $P_n = \alpha_n x^n + \dots$ spełniają

$$(P_n, P_m)_{L^2_\rho(a, b)} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Zadanie 14 (trudne) Znajdź wzory na regułę tróczłonową dla wielomianów Czebyszewa na $[a, b]$ tzn dla $\hat{T}_n(x) = T_n\left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right) * \frac{2}{b-a}\right)$ gdzie $\{T_n\}_{n \geq 0}$ to wielomiany Czebyszewa na $[-1, 1]$ spełniające $T_0 = 1, T_1(t) = t$ i $T_{n+1} + T_n = 2tT_n$.

Zadanie 15 (trudne) Rozpatrzmy $g(x) = \sin(x)$ i zadania znalezienia wielomianów najlepszej aproksymacji dla $g: w_1 \in V_1 = P_n$ i $w_2 \in V_2 = P_{n-1}$ dla $n > 0$ w normie:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos(x)) |f(x)|^2 dx}.$$

(a) Znajdź w_1, w_2 dla $n = 1$.

(b) Dla jakich $n > 0$ prawdą jest, że $w_1 = w_2$? Uzasadnij odpowiedź.

WSK: to norma typu L^2 więc generowana przez iloczyn skalarny typu L^2 z odpowiednią wagą a podprzestrzenie są przestrzeniami wielomianów. Każda metod opisana w skrypcie zadziała ale żeby sobie uprościć rachunki można zauważyć, że w iloczynie skalarnym generującym tę normę $(u, v) = 0$ o ile $u * v$ jest funkcją nieparzystą np. $(\sin(x)x^k)$ lub (x^k, x^j) dla k parzystego a j nieparzystego.

Zadanie 16 (trudne)

(a) Pokaż, że element najlepszej aproksymacji jednostajnej, czyli w normie $\|\cdot\|_{\infty}$, w P_n na $[a, b]$ dla dowolnej funkcji ciągłej f interpoluje tę funkcję w $n + 1$ punktach na $[a, b]$.

(b) Czy prawdą jest, że dla danej funkcji f ciągłej na $[a, b]$ zawsze istnieje ciąg węzłów $\{x_k^n\}_{k=0}^n \subset [a, b]$ taki, że ciąg wielomianów stopni nie większych od n : $L_n f$ interpolujących tę funkcję w tych węzłach (tzn. $L_n f(x_k^n) = f(x_k^n)$) zbiega jednostajnie do tej funkcji? Uzasadnij odpowiedź.

WSK: Użyj twierdzenia o alternansie.

Zadanie 17 (trudne) Dla zbioru $K = \{-1, 0, 1\}$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty, K} = \max_{x \in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = x^2 - 1.876 * x + \sqrt{17}$.

WSK: Ile punktowy jest alternans dla wielomianu liniowego a ile punktów jest w zbiorze K ?

Zadanie 18 Niech $f(x) = 42x^3 - 2x^2 + 2x - 1$. Znajdź wielomian stopnia ≤ 2 najlepiej przybliżający f w normie supremum na przedziale

- $[-1, 1]$
- $[-7, -5]$
- $[0, 1]$
- $[0, 4]$

Jeśli to zadanie będzie na kartkówce to będzie trzeba wybrać 2 przedziały.

WSK: można skorzystać z własności wielomianów Czebyszewa i ich własności minimalizacyjnych na $[-1, 1]$ i odpowiedniego liniowego przeskalowania

Zadanie 19 Niech $f(x) = 42x^3 - 2x$. Pokaż że $w_1 = w_2$ dla w_n wielomianu najlepszej aproksymacji jednostajnej dla f stopnia $\leq n$ na $[-5, 5]$. Następnie znajdź w_1 .

Czy znając w_1 potrafisz znaleźć wielomian liniowy najlepszej aproksymacji jednostajnej dla $g(x) = 21 * x^3 + x - 2$?

Wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej w_n st $\leq n$ dla $f \in C([a, b])$: spełnia: $\|f - w_n\|_{\infty, [a, b]} = \inf_{p \in P_n} \|f - p\|_{\infty, [a, b]} \quad \forall p \in P_n$. Tu P_n przestrzeń wielomianów stopnia $\leq n$.

WSK: f jest nieparzystą więc można pokazać (jak?) że wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej w_n stopnia $\leq n$ też będzie funkcją nieparzystą. Zauważ że $g(x) = 0.5 * f(x) + 2x - 2$.

Zadanie 20 (trudne) Dla zbioru $K = [-1, 1]$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty, K} = \max_{x \in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = x^2 - 1.876 * x + \sqrt{17}$. Pokaż że alternans w tym przypadku zawiera końce odcinka.

WSK: Funkcja $f - p$ jest ściśle wypukła dla dowolnego wielomianu liniowego p . Ile punktowy jest alternans dla wielomianu liniowego? Ile ekstremów WEWNĄTRZ odcinka może mieć funkcja $f - p$ dla p wielomianu liniowego?

Zadanie 21 (trudne) Dla zbioru $K = [-1, 2]$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty, K} = \max_{x \in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = |x| - x + 4$. Pokaż że alternans w tym przypadku zawiera końce odcinka.

WSK: Gdzie funkcja postaci $|x| + p_1$ dla p_1 wielomianu liniowego może mieć ekstrema?

Zadanie 22 Pokaż że dla dodatniej wagi parzystej ω (tzn. $\omega(-x) = \omega(x)$) wielomian ortogonalny stopnia parzystego w iloczynie skalarnym typu $L_{\omega}^2(-a, a)$: $(f, g)_{L_{\omega}^2(-a, a)} := \int_{-a}^a \omega f g dx$ jest funkcją parzystą.

Zadanie 23 Niech $p_k(x) = x^k + \dots$ ciąg wielomianów ortogonalnych z iloczynie skalarnym typu $L_{\rho}^2(-1, 1)$ z wagą parzystą tzn $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\rho(x) dx$ z $\rho(x) = \rho(-x)$. Pokaż, że $p_k(0) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy k nieparzyste.

WSK: Można pokazać że zera p_k leżą symetrycznie względem zera.

Zadanie 24 Wiedząc, że dla danej dodatniej wagi ω zachodzi:

$$\int_{-1}^3 x^k \omega dx = \begin{cases} 0 & k \text{ nieparzyste} \\ \frac{1}{k+1} & w.p.p. \end{cases} \quad k = 0, \dots, 8$$

- znajdź pierwsze cztery wielomiany ortogonalne P_k $k = 0, 1, 2, 3$ w iloczynie skalarnym $(f, g) := \int_{-1}^3 \omega f g dx$.
- znajdź kwadraturę Gaussa obliczania $\int_{-1}^3 f \omega dx$ rzędu cztery.

P_k k -ty wielomian ortogonalny gdy P_k stopnia k i $(P_k, w) = 0$ dla dowolnego w wielomianów st. $< k$.

WSK: W pierwszym podpunkcie można skorzystać z ortogonalizacji Gramma-Schmidta lub reguły tróczłonowej - por. skrypt wykładowcy. W drugim podpunkcie należy skorzystać z pierwszego.

Zadanie 25 Znajdź kwadraturę maksymalnego rzędu opartą o dwa węzły w tym jeden równy zero dla obliczania $\int_{-1}^3 f dx$ tzn $Qf = Af(0) + Bf(\theta)$ dla $\theta \in [-1, 3]$.

Zadanie 26 (trudne) (o ile nie było na ćwiczeniach) Rozpatrzmy kwadraturę $P_{[a,b]}f = (b-a) * f((a+b)/2)$ dla $\int_a^b f dt$.

- (a) Znajdź jej rząd.
 (b) Pokaż oszacowania błędu

$$\left| \int_a^b f dt - P_{[a,b]}f \right| \leq c_j \|f^{(j)}\|_{\infty, [a,b]} (b-a)^{j+1}$$

dla $f \in C^j([a, b])$ dla $j = 1, 2$. (Tu c_j stałe niezależne od f ani a, b .) Przypadek $j = 2$ jest trudny.

- (c) Konstruujemy kwadraturę złożoną prostokątów dla całki $\int_c^d f(x) dx$:

$$P_n f := \sum_{k=1}^N P_{[x_{k-1}, x_k]} f = h \sum_{k=1}^N f(x_k - h/2)$$

dla $h = (d-c)/N$ i $x_k = c + k * h$. Pokaż, że

$$e_N = \left| \int_c^d f dt - P_N f \right| \leq d_j h^j \|f^{(j)}\|_{\infty, [c,d]}$$

dla $j = 1, 2$. (Tu d_j stałe niezależne od f ani N czy h .)

- (d) Pokaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} e_N = 0$ dla f dowolnej ciągłej (pochodna może nie istnieć).

Wsk: Trzeci podpunkt wynika z drugiego.