Zadania z fl i norm, LU, QR, LZNK

Oznaczenie : aew oznacza $a * 10^w$ dla a liczby rzeczywistej z zakresu $[0, 10]$ postaci $d.dddd$ gdzie d to cyfra $0, \ldots, 9$, a w wykładnik czyli liczba całkowita, np $1.234567e5$ oznacza 123456.7 a $0.1234e - 3$ oznacza 0.0001234.

Zadania czy podpunkty oznaczone jako **trudne/bardzo trudne** nie będą na kartkówce. Część z nich jest trudna pozornie z braku narzędzi, które pojawią się na wykładzie później, albo jest tylko dość mozolna obliczeniowo, czy dotyczą mniej ważnych zagadnień z wykładu.

Zadanie 1 Chcemy obliczyć funkcję $f(x) = \exp(10^7 x)$ w arytmetyce pojedynczej precyzji (nie przejmując się zakresem tzn. niedomiarem/nadmiarem). Policz (przybliżony i względny) współczynnik uwarunkowania zadania dla $x \in [-10, 10]$ i określ czy obliczanie w tej arytmetyce fl wartości f dla $x = -6$ jest dobrze uwarunkowane ze względu na błąd względny?

Zadanie 2 Chcemy w fl obliczyć $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + 7}$. Rozpatrzmy dwa algorytmy: w pierwszym liczymy:

$f := \sqrt{4x^2 + 7}; f := 2x - f;$

a w drugim:

$f := \sqrt{4x^2 + 7}; f := -7.0/(2x + f);$

Który z nich należy zastosować do obliczenia w arytmetyce fl pojedynczej precyzji $f(10^7)$? (Podać krótkie uzasadnienie - 1-2 zdania - nie trzeba formalnie dowodzić oszacowań)

Zadanie 3 Chcemy obliczyć $(x + 2)^3 - 8$ dla $x > 0$. Zaproponuj algorytm o małym błędzie względnym obliczania tej funkcji dla $x > 0$. (uzasadnij)

WSK: Można pokazać numeryczną poprawność + dobre uwarunkowanie - co gwarantuje mały błąd względny (wykład) ale wystarczy uzasadnić krótko w 2-3 zdaniach.

Zadanie 4 (trudne) Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania: iloczynu skalarnego dwóch wektorów $x, y \in \mathbb{R}^M$ tzn. $x^T y = \sum_{k=1}^{M} x(k)y(k)$ jest numerycznie poprawny tzn. obliczamy

```
s=x(1)*y(1);
for  k=2:M,
  s=s+x(k)*y(k);
endfor
```

Zadanie 5 (trudne) Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania iloczynu macierz kwadratowej $A \in \mathbb{R}^{M,M}$ i wektora $x, \in \mathbb{R}^M$ tzn. $y = Ax$: jest numerycznie poprawny:

```
for  j=1:M,
 y(j)=0;
 for k=1:M,
   y(j)=y(j)+A(j,k)*x(k);
 endfor
endfor
```

Wskazówka: $y(j)$ jest iloczynem skalarnym $j-$tego wiersza A z x.

Zadanie 6 (bardzo trudne) Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania: cosinusa kąta dwóch wektorów $x, y \in \mathbb{R}^M$ tzn. $\cos(x, y) = \frac{x^T y}{\sqrt{x^T x}\sqrt{y^T y}}$ jest numerycznie poprawny:

(a) $a = \sqrt{\sum_{k=1}^M x_k^2}$, $b = \sqrt{\sum_{k=1}^M y_k^2}$

(b) $c = \sum_{k=1}^M x_k y_k$

(c) $w = c/(a * b)$

Zadanie 7 Dla $C = 10^{30}$ znajdź takie $\alpha > 0$, że dla normy postaci $\|x\| = |x_1| + \alpha|x_2|$ w $\mathbb{R}^2$ zachodziło

$$\max_{x \neq 0} \frac{\|x\|_1}{\|x\|} = C \qquad \min_{x \neq 0} \frac{\|x\|_1}{\|x\|} = 1$$

tzn. by optymalne stałe równoważności były równe C i jeden odpowiednio.

Zadanie 8 Znajdź możliwe duże $c > 0$ i możliwie małe $C > 0$, że dla normy wektorowej w $\mathbb{R}^k$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^k j^{-1}|x_j|^2}$ zachodzi

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k \qquad c\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|_2.$$

Stałe c, C nazywamy stałymi równoważności między normą drugą a normą $\| \cdot \|$.

Zadanie 9 (trudne) Dla wektora rzeczywistego $x = (x_i)_{i=1}^m$ definiujemy $|x| = (|x_i|)_{i=1}^m$. Dla norm p-tych zachodzi zawsze $\|x\|_p = \||x|\|_p$. Czy istnieje norma $\| \cdot \|$ w $\mathbb{R}^2$ dla której istnieje wektor x taki, że $\|x\| \neq \||x|\|$? Uzasadnij (w przypadku na tak podaj definicję normy).

Zadanie 10 (trudne) Dla macierzy rzeczywistej $A = (a_{ij})_{i,j}$ $n \times n$ zdefiniujmy $|A| = (|a_{ij}|)_{ij}$.

(a) Czy dla normy Frobeniusa, maksimum i pierwszej zachodzi równość norm A i $|A|$? Wsk: Istnieją proste wzory na te normy zależne od współczynników macierzy.

(b) Pokaż np wprost z definicji normy indukowanej, że

$$\|A\|_2 \leq \||A|\|_2.$$

(c) Podaj kontrprzykład, że odwrotna nierówność nie zawsze zachodzi. Wsk: Można skonstruować kontrprzykład $A = A^T$ 2×2 korzystając ze wzoru: $\|A\|_2 = \rho(A)$ - dla $A = A^T$. Tu $\rho(A)$ moduł największej co do modułu wartości własnej A.

Zadanie 11 (trudne) Pokaż że jeśli dla wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$ (x ma niezerowe składowe tzn. $x_k \neq 0$) zachodzi $\frac{|x_k - y_k|}{|x_k|} \leq \epsilon$

$$\frac{|x_k - y_k|}{|x_k|} \leq \epsilon \qquad k = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$

to

$$\frac{\|x_k - y_k\|_p}{\|x_k\|_p} \leq \epsilon \qquad p = 1, 2, \infty \tag{2.2}$$

Zadanie 12 (trudne) Czy stwierdzenie odwrotne do poprzedniego zadania jest prawdziwe np. dla $p = \infty$ czy z tego że zachodzi (2.2) zachodzi (2.1)? Jeśli nie zachodzi proszę podać kontrprzykład np. dla $n = 2$.

Zadanie 13 (trudne) Udowodnij, że dla macierzy $A = (a_{kl})$ silnie diagonalnie dominującej wierszowo tzn.

$$|a_{kk}| > \sum_{k \neq l} |a_{kl}| \ \forall k$$

eliminacje Gaussa tzn rozkład LU można wykonać bez wyboru elementu głównego (czyli bez permutacji kolumn czy wierszy).

Uwaga: Nie jest to trudne ale na tyle mozolne że na kartkówce nie będzie - ale TRZEBA to wiedzieć więc zachęcam do przeliczenia.

Zadanie 14 Niech

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 30 & 22 & 11 \\ 0 & 20 & 110 \end{pmatrix}$$

Znajdź metodą eliminacji Gaussa z wyborem elementu w kolumnie (częściowy wybór elementu głównego) macierze L, U, P gdzie L dolnotrójkątna z jedynkami na diagonali, U górnotrójkątna, P permutacji takie, że $PA = LU$.

Zadanie 15 Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Znajdź metodą eliminacji Gaussa dla macierzy symetrucznej dodatnio określonej macierze rozkładu Choleskiego tzn. L, D gdzie L dolnotrójkątna z jedynkami na diagonali, D diagonalna z dodatnimi elementami na diagonali, takie, że $A = LDL^T$. jak znając ten rozkład znaleźć czynnik rozkładu Choleskiego tzn. $\hat{L}$ macierz dolnotrójkątną taką, że $A = \hat{L}\hat{L}^T$?

Zadanie 16 Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Znajdź metodą Choleskiego czynnik rozkładu Choleskiego tzn. L macierz dolnotrójkątna z dodatnią przekątną taką, że $A = LL^T$. Czy istnieje rozkład Choleskiego macierzy

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}?$$

Zadanie 17 (trudne) Rozpatrzmy macierz kwadratową wymiaru $(m + 2) \times (m + 2)$ dla $m \geq 2$ zapisaną w formie blokowej $A = \begin{pmatrix} C & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$, gdzie C dana nieosobliwa macierz $m \times m$, której czynniki rozkładu QR mamy dane (tzn znamy ortogonalną Q i górnotrójkątną R takie, że $C = QR$), B macierz $m \times 2$ maksymalnego rzędu.

(a) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu równań liniowych $A\vec{x} = \vec{f}$ możliwie niskim kosztem przy założeniu, że A nieosobliwa.

(b) Oszacuj ten koszt w terminach $C_1 m^p + O(m^{p-1})$ dla $p = 1, 2, 3, \ldots$ i C_1 stałej.

(c) Czy przy powyższych założeniach A jest nieosobliwa? Jeśli nie to podaj możliwy do sprawdzenia możliwie tanio warunek na C i B, aby A była nieosobliwa.

Zadanie 18 (Układ z macierzą trójdiagonalną cykliczną) Rozpatrzmy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ i A macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko w rogach i na 3 głównych diagonalach tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ d_2 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa (rozkładu LU) bez wybory elementu głównego możliwie niskim koszcie względem n. Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej C i p naturalnego).

Wsk: Dla $d_1 = d_2 = 0$ algorytm jest znany powinien być na ćwiczeniach (eliminujemy tylko poddiagonale - $n-1$ kroków o stałym koszcie - otrzymujemy rozkład LU z L, U 2-diagonalnymi) - zmodyfikuj ten algorytm dla macierzy cyklicznej.

Zadanie 19 Dla macierzy A wymiaru 10×10 z Zadania 18 dla $a_k = d_k = -b_k = -c_k = 1$ dla wszystkich odpowiednich k, oblicz indukowaną normę maksimum tzn. $\|A\|_\infty$ i wyznacz taki wektor x różny od zera, że $\|x\|_\infty \|A\|_\infty = \|Ax\|_\infty$. Czy wektor x jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do przemnożenia przez -1)?

Zadanie 20 Dla danych m różnych punktów (x_k, y_k) określamy krzywą $y - a * x^4 - bx^2 - c = 0$ (a, b, c parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^{m} |y_k - a * x_k^4 - bx_k^2 - c|^2 = \min_{\hat{a},\hat{b},\hat{c}} \sum_{k=1}^{m} |y_k - \hat{a} * x_k^4 - \hat{b} * x_k^2 - \hat{c}|^2$$

Sformułuj zadanie znalezienia parametrów takiej krzywej jako liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) dla danych m punktów. Określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to zadania miało jednoznaczne rozwiązanie dla $m \geq 0$. Wyznacz koszt rozwiązania tego LZNK zadania przy pomocy algorytmu Householdera względem m tzn jako $C_H m^p + O(m^{p-1})$ dla C_H stałej dodatniej i p wykładnika naturalnego.

Zadanie 21 Niech A macierz $n + 1 \times n$ kolumnami regularna trójdiagonalna tzn. wszystkie elementy takie, że $|i - j| > 1$ są równe zero. Jak rozwiązać LZNK z taką macierzą kosztem rzędu $C_1 n + C_2$ dla C_1, C_2 stałych dodatnich z użyciem rozkładu QR uzyskanym z wykorzystaniem macierzy Householdera.

Zadanie 22 (trudne) Rozpatrzmy macierz A wymiaru $(n + 1) \times n$ taką że jeśli zapisując blokowo mamy:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \vec{b}_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

dla A_1 macierzy $n \times (n-1)$ i wektora $\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ z b_2 różnym od zera i $\vec{b}_1$ wektorem wymiaru n. Znamy macierze: górnotrójkątną max rzędu R wymiaru $n \times (n-1)$ i Q_1 ortogonalną wymiaru $n \times n$ że

$$A_1 = Q_1 R.$$

oraz potrafimy policzyć iloczyn $Q_1 x$ lub $Q_1^T x$ kosztem liniowym tzn. Cn dla pewnej stałej C. Czy macierz A jest kolumnami regularna? A jeśli tak to jak możliwie tanio znaleźć rozkład QR macierzy A z Q ortogonalną i R górnotrójkątną? Podaj koszt jako funkcję postaci $C_2 n^p + O(n^{p-1})$ dla najniższego możliwego p naturalnego i jakiejś stałej C_2. Można rozważyć dwa przypadki - pierwszy kiedy explicite wyliczamy Q a drugi gdy otrzymujemy Q jako iloczyn odpowiednio dobranych macierzy ortogonalnych.

Zadanie 23 (trudne) Dla danego $\epsilon > 0$ niech

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 & 0 \\ 1 & \epsilon & 1 \\ 0 & 1 & \epsilon \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że

$$\lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{cond}_2(A_\epsilon) = \infty.$$

Wsk: Dla $A = A^T$ $\|A\|_2 = \rho(A)$ promień spektralny (max z modułu z wartości własnych) - zauważmy że $A = \epsilon I + A_0$ dla

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

więc $\lambda(A_\epsilon) = \epsilon + \lambda(A_0)$ dla $\lambda(C)$ zbiór wartości własnych macierzy C.

Zadanie 24 (nie wiem czy będzie na 1 kartkówce w listopadzie) Rozpatrzmy rodzinę LZNK z macierzą A_α i wektorem f takich, że:

$$H_2 * H_1 * A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

gdzie H_k jest macierzą Householdera z odpowiednim wektorem Householdera w_k: $w_1 = (1,1,1,1)^T$ i $w_2 = (0,-2,0,0)^T$.

(a) Określ dla jakich wartości α to LZNK ma jednoznaczne rozwiązanie.

(b) Policz pierwsze kolumny macierzy A_α dla α równego 8 i $-\sqrt{7}/23$.

(c) Dla jakiego α błąd rozwiązania LZNK $\|A_\alpha x_\alpha^* - f\|_2$ jest najmniejszy? Tu x_α^* to rozwiązania LZNK z A_α i f.

Zadanie 25 (trudne) bo za długie na kartkówke... Rozważmy zadanie: Dla danych m punktów $z_k \in R^3$ i danego niezerowego wektora $\vec{n} \in R^3$ znajdź wektor $x \in R^3$ należący do płaszczyzny prostopadłej do wektora $\vec{n}$ tzn. zadanej wzorem $P_\alpha = \{x : x^T \vec{n} = \alpha\}$ taki, że suma kwadratów odległości

$$\sum_{k=1}^{M} dist(z_k, P_\alpha)^2$$

jest minimalna. Tu $dist(z, P_\alpha) = \min_{y \in P_\alpha} \|z - y\|_2$.

(a) Pokaż, że $dist(z, P_\alpha) = |z^T\vec{n} - \alpha| = |(z - x)^T\vec{n}|$ dla dowolnego $x \in P_\alpha$.

(b) Sformułuj to zadanie jako LZNK z A $m \times 3$ i wektorem f $m \times 1$.

(c) Pokaż, że to LZNK nie jest regularne i zaproponuj metodę znalezienia rozwiązania o minimalnej normie drugiej (to klasyczny warunek by ujednoznacznić LZNK) za pomocą przekształceń Householdera. Oszacuj koszt jako $O(m^p)$ dla możliwie małego p naturalnego. Czy ta metoda pozwoli znaleźć też bazę przestrzeni zerowej macierzy A?

(d) Przeformułuj to zadanie na znalezienie P_α czyli de facto α i sformułuj jako regularne LZNK z macierzą niezerową $m \times 1$.

Można założyć, że $\|\vec{n}\|_2 = 1$ - to trochę uprości wzory.