Drugi projekt z labu

Zamiast w octave można zaprogramować odpowiednią funkcję i testy w Pascalu, C/C++, fortranie.

Projekt składa się z dwóch części:

1. napisać funkcję octave'a GSR() z metodą znajdowania rozkładu QR A wymiaru $M \times N$ kolumnami regularnej tzn $A = Q * R$ dla

   (a) Q wymiaru $M \times N$ takiej, że $Q^T Q = I$ - kolumny są ortonormalne

   (b) R górnotrójkątnej nieosobliwej wymiaru $N \times N$ z dodatnią główną przekątną

   blokowym rekurencyjnym algorytmem Gramm-Schmidta tzn. jeśli macierz ma 1 kolumne ($n = 1$) - to $R = \|A\|_2$ (A to wektor a R to macierz 1×1 czyli skalar) i wtedy $Q = A/R$; w przeciwnym przypadku w kolejnych krokach liczymy:

   (a) dzielimy blokowo kolumny macierzy A tzn A=[A1,A2] np. tak by ilość kolumn obu podmacierzy była równa - lub prawie równa (choć algorytm działa dla dowolnego podziału np biorąc za $A1$ pierwszą kolumne A)

   (b) wywołujemy funkcję [Q1,R1]=GSR(A1) znajdując odpowiedni rozkład QR tzn. $Q1 * R1 = A1$,

   (c) ortogonalizujemy kolumny $A2$ względem układu ortonormalnego kolumn $Q1$ tzn. licząc $B = A2 - Q1 * R12$ (jak dobrać $R12$? To zazwyczaj nie jest macierz trójkątna...) tak by kolumny B były ortogonalne do kolumn $Q1$ tzn. by $B^T * Q1 = 0$,

   (d) znaleźć rozkład QR macierzy $B = Q2 * R2$ znów wywołując GSR,

   (e) tworzymy nasze macierze rozkładu QR tzn. Q=[Q1,Q2] i R=[R1,R12;0,R2] - zero oznacza blok zerowy odpowiedniego wymiaru.

   Zauważmy, że A1=Q1∗R1=[Q1,Q2]∗[R1;0] a A2=B+Q1∗R12=Q1∗R12+Q2∗R2=[Q1,Q2]∗[R12;R2]. (wszędzie używamy składni octave'a do zapisywania macierzy blokowego, przecinki oddzielają bloki wierszowo, średniki kolumnowo).

   Parametrem funkcji:

```
function [Q,R]=GSR(A)
% kod funkcji
end
```

   ma być: macierz A,

   Funkcja ma zwracać macierze Q, R czyli czynniki rozkładu QR

   Funkcja powinna sprawdzać czy macierz jest kolumnami regularna (oczywiście na jakimś poziomie tolerancji) - jak to zrobić to zadanie dla Państwa - zwracać ostrzeżenie kiedy coś może być nie tak.

2. **Testy**:

   (a) **Test czy metoda działa** Przetestować na kilku prostych przykładach dla losowych macierzy $m \times n$ z $m \geq n$ - np. $m = n + 1$ czy $m = n + 10$ dla $n = 3, 10, 20$ sprawdzając czy $\|Q * R - A\|_1$ małe i czy kolumny Q są rzeczywiście ortonormalne (lub bliskie ortonormalności) - górnotrójkątność mamy zapewnioną (dlaczego?) i nie musimy jej sprawdzać.

(b) **Test dla trudnych przykładów** wziąć złą numerycznie macierz np. pierwszych n kolumn macierzy Hilberta $n+1 \times n+1$ dla różnych n i powtórzyć testy jak w poprzednim punkcie.

(c) **Zastosowanie do LZNK** Zastosować tę funkcję do rozwiązania LZNK z losową macierzą A 21×20 i losowym wektorem prawej strony f tzn liczymy $b = Q^T f$ i rozwiązujemy $Rx = b$ - porównać z wynikiem otrzymanym operatorem *backslash*.