

Seria ostatnia - równania nieliniowe

Oznaczenie : aew oznacza $a * 10^w$ dla a liczby rzeczywistej z zakresu $[0, 10]$ postaci $d.dddd$ gdzie d to cyfra $0, \dots, 9$, a w wykładnik czyli liczba całkowita, np $1.234567e5$ oznacza 123456.7 a $0.1234e-3$ oznacza 0.0001234 .

Zadania czy podpunkty oznaczone jako **trudne** nie będą na kartkówce. Część z nich jest trudna pozornie z braku narzędzi które pojawiają się na wykładzie później.

Metoda generująca ciąg x_n zbieżny do x^* rozwiązania ma rząd zbieżności (wykładnik zbieżności) równy $p \geq 1$ jeśli istnieje $C \geq 0$ i N takie, że jeśli $n \geq N$ to

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p \quad p > 1$$

w przypadku $p = 1$ żądamy dodatkowo by $C < 1$ i wtedy mówimy o zbieżności liniowej. Przypadek $p = 2$ określamy jako zbieżność kwadratową a $p = 3$ kubiczną.

Zadanie 1 (trudne)

- Pokaż, że metoda iteracyjna $x_{k+1} = F(x_k)$ spełniająca $F \in C^p$ na otoczeniu x^* , $F(x^*) = x^*$ i $F^{(j)}(x^*) = 0; j = 1, \dots, p-1$ ($p > 1$) jest zbieżna lokalnie i ma rząd zbieżności p .
- Określ rząd zbieżności metody Newtona korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0$ i $f \in C^\infty$.
- Określ rząd zbieżności metody Newtona korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0 = f''(x^*)$ i $f \in C^\infty$.
- Określ rząd zbieżności metody cięciw $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_0)$ korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0$ i $f \in C^\infty$.
- Określ rząd zbieżności metody Halleya to metoda Newtona zastosowana do

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}},$$

korzystając z tego kryterium przy założeniu $f'(x^*) \neq 0$ i $f \in C^\infty$.

Zadanie 2 Aby znaleźć pierwiastek trzeciego stopnia z 5 czyli $x^* = 5^{1/3}$, dla równania $f(x) = x^3 - 5 = 0$ z rozwiązaniem $x^* = 5^{1/3}$ zastosowano metodę Newtona.

- Pokaż, że dla dowolnego $x_0 > 0$ zachodzi $x_k \geq x^*$ dla $k > 0$.
- udowodnij, że dla dowolnego $x_0 > 0$ metoda zbiegnie do x^* .
- Policz granice $\frac{e_{n+1}}{e_n^2}$ (o ile istnieje) dla $e_n = x_n - x^*$.
- Weźmy $x_0 > x^*$ czy wtedy prawdziwe jest oszacowanie $e_{n+1} \leq L e_n$ dla $n \geq 0$ ze stałą $L < 1$?

Zadanie 3 (trudne) Do rozwiązania przybliżonego równań $f(x) = x * \sin(x - 3)$ i $g(x) = (x - 3)^2 \exp(x)$ których rozwiązaniem jest $x^* = 3$ zastosowano metodę Newtona. Czy w obu przypadkach metoda będzie zbieżna lokalnie (dla x_0 przybliżenia startowego dostatecznie bliskiego x^*)? Jeśli tak to określ wykładnik (rząd) zbieżności w obu przypadkach.

Zadanie 4 Pokaż, że równanie $x^* - 0.2 * \sin(x^*) = 6$ ma dokładnie jedno rozwiązanie i że następująca metoda iteracyjna $x_n = 0.2 * \sin(x_{n-1}) + 6$ zbieganie dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ do rozwiązania tego równania. Oszacuj możliwie dobrze błąd $|x_9 - x^*|$ dla $x_0 = 6$.

Zadanie 5 Do rozwiązania zadania $f(x^*) = 0$ dla $f(x) = \exp(x) - a$ dla ustalonego $a \in (1, 4)$ zastosowano metodę iteracyjną, która w 9-tej iteracji zwróciła $x_9 > 0$ takie że mamy $|f(x_9)| = 1e - 7$. Czy na tej podstawie możemy stwierdzić, że $|x_9 - x^*| \leq 1e - 6$? Uzasadnić.

WSK: Skorzystać z tw. o wartości średniej i tego że $f(x^*) = 0$.

Zadanie 6 (trudne) Rozważamy funkcję

$$f(x) = \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + x - 1.$$

- (a) Pokaż, że f ma jedyne miejsce zerowe r w przedziale $(0, 1)$.
- (b) Pokaż, że gdy do przybliżonego wyznaczenia r stosujemy metodę Newtona. dla dowolnego punktu startowego $x_0 \in (0, 1)$ otrzymamy ciąg przybliżeń x_n zbieżny do r .
- (c) Pokaż, że zbieżność jest dokładnie kwadratowa.