Seria czwarta - aproksymacja, kwadratury

Zadanie 1 (trudne) Znajdź wzory na regułę trójczłonową $P_{n+1} = a_n x P_n + b_n P_n + c_n P_{n-1}$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ dla wielomianów ortonormalnych P_n w $(f, g)_{L^2_\rho(a,b)}$. Wielomiany ortonormalne $P_n = \alpha_n x^n + \ldots$ spełniają

$$(P_n, P_m)_{L^2_\rho(a,b)} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \qquad m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Zadanie 2 Znajdź wzory na regułę trójczłonową dla wielomianów Czebyszewa na $[a, b]$ tzn dla $\hat{T}_n(x) = T_n((x - \frac{a+b}{2}) * \frac{2}{b-a})$ gdzie $\{T_n\}_{n \geq 0}$ to wielomiany Czebyszewa na $[-1, 1]$ spełniające $T_0 = 1, T_1(t) = t$ i $T_{n+1} + T_n = 2tT_n$.

Zadanie 3 Rozpatrzmy $g(x) = \sin(x)$ i zadania znalezienia wielomianów najlepszej aproksymacji dla g: $w_1 \in V_1 = P_n$ i $w_2 \in V_2 = P_{n-1}$ dla $n > 0$ w normie:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos(x))|f(x)|^2 \, dx}.$$

(a) Znajdź w_1, w_2 dla $n = 1$.

(b) Dla jakich $n > 0$ prawdą jest, że $w_1 = w_2$? Uzasadnij odpowiedź.

WSK: to norma typu L^2 więc generowana przez iloczyn skalarny a podprzestrzenie są przestrzeniami wielomianów. Każda metod opisana na końcu zadziała ale żeby sobie uprościć rachunki można zauważyć, że w iloczynie skalarnym generującym tę normę $(u, v) = 0$ o ile $u * v$ jest funkcją nieparzystą np. $(\sin(x)x^k)$ lub (x^k, x^j) dla k parzystego a j nieparzystego.

Zadanie 4 (a) Pokaż, że element najlepszej aproksymacji jednostajnej, czyli w normie $\|\cdot\|_\infty$, w P_n na $[a, b]$ dla dowolnej funkcji ciągłej f interpoluje tę funkcję w $n + 1$ punktach na $[a, b]$.

(b) Czy prawdą jest, że dla danej funkcji f ciągłej na $[a, b]$ zawsze istnieje ciąg węzłów $\{x_k^n\}_{k=0}^n \subset [a, b]$ taki, że ciąg wielomianów stopni nie większych od n: $L_n f$ interpolujących tę funkcję w tych węzłach (tzn. $L_n f(x_k^n) = f(x_k^n)$) zbiega jednostajnie do tej funkcji? Uzasadnij odpowiedź.

WSK: Użyj twierdzenia o alternansie.

Zadanie 5 Dla zbioru $K = \{-1, 0, 1\}$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty,K} = \max_{x \in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = x^2 - 1.876 * x + \sqrt{17}$.

WSK: Ile punktowy jest alternans dla wielomianu liniowego a ile punktów jest w zbiorze K?

Zadanie 6 Niech $f(x) = 42x^3 - 2x^2 + 2x - 1$. Znajdź wielomian stopnia ≤ 2 najlepiej przybliżający f w normie supremum na przedziale

- $[-1, 1]$
- $[-7, -5]$
- $[0, 1]$

- $[0, 4]$

WSK: można skorzystać z własności wielomianów Czebyszewa i ich własności minimalizacyjnych na $[-1, 1]$ i odpowiedniego liniowego przeskalowania

Zadanie 7 Niech $f(x) = 42x^3 - 2x$. Pokaż że $w_1 = w_2$ dla w_n wielomianu najlepszej aproksymacji jednostajnej dla f stopnia $\leq n$ na $[-5, 5]$. Następnie znajdź w_1. Czy znając w_1 potrafisz znaleźć wielomian liniowy najlepszej aproksymacji jednostajnej dla $g(x) = 21 * x^3 + x - 2$?

WSK: f jest nieparzystą więc można pokazać (jak?) ze wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej w_n stopnia $\leq n$ też będzie funkcją nieparzystą. Zauważ że $g(x) = 0.5 * f(x) + 2x - 2$.

Zadanie 8 Dla zbioru $K = [-1, 1]$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty,K} = \max_{x\in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = x^2 - 1.876 * x + \sqrt{17}$. Pokaż że alternans w tym przypadku zawiera końce odcinka.

WSK: Funkcja $f - p$ jest ściśle wypukła dla dowolnego wielomianu liniowego p. Ile punktowy jest alternans dla wielomianu liniowego? Ile ekstremów WEWNĄTRZ odcinka może mieć funkcja $f - p$ dla p wielomianu liniowego?

Zadanie 9 Dla zbioru $K = [-1, 2]$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty,K} = \max_{x\in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = |x| - x + 4$. Pokaż że alternans w tym przypadku zawiera końce odcinka.

WSK: Gdzie funkcja postaci $|x|+p_1$ dla p_1 wielomianu liniowego może mieć ekstrema?

Zadanie 10 Pokaż że dla dodatniej wagi parzystej ω (tzn. $\omega(-x) = \omega(x)$) wielomian ortogonalny stopnia parzystego w iloczynie skalarnym typu $L^2_\omega(-a, a)$: $(f, g)_{L^2_\omega(-a,a)} := \int_{-a}^{a} \omega f g \, dx$ jest funkcją parzystą.

Zadanie 11 Niech $p_k(x) = x^k + \dots$ ciąg wielomianów ortogonalnych z iloczynie skalarnym typu $L^2_\rho(-1, 1)$ z wagą parzystą tzn $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\rho(x) \, dx$ z $\rho(x) = \rho(-x)$. Pokaż, że $p_k(0) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy k nieparzyste.

WSK: Można pokazać że zera p_k leżą symetrycznie względem zera.

Zadanie 12 Wiedząc, że dla danej dodatniej wagi ω zachodzi:

$$\int_{-1}^{3} x^k \omega \, dx = \begin{cases} 0 & k \ nieparzyste \\ \frac{1}{k+1} & w.p.p. \end{cases} \qquad k = 0, \dots, 8$$

- znajdź pierwsze cztery wielomiany ortogonalne T_k $k = 1, 2, 3, 4$ w iloczynie skalarnym $(f, g) := \int_{-1}^{3} \omega f g \, dx$.
- znajdź kwadraturę Gaussa obliczania $\int_{-1}^{3} f\omega \, dx$ rzędu cztery.

WSK: W pierwszym podpunkcie można skorzystać z ortogonalizacji Gramma-Schmidta lub reguły trócżłonowej - por. notatki z wykładu. W drugim podpunkcie należy skorzystać z pierwszego.

Zadanie 13 Znajdź kwadraturę maksymalnego rzędu opartą o dwa węzły w tym jeden równy zero dla obliczania $\int_{-1}^{3} f \, dx$ tzn $Qf = Af(0) + Bf(\theta)$ dla $\theta \in [-1, 3]$.

Zadanie 14 (o ile nie było na ćwiczeniach) Rozpatrzmy kwadraturę $P_{[a,b]}f = (b-a)*f((a+b)/2)$ dla $\int_a^b f\,dt$.

(a) Znajdź jej rząd.

(b) Pokaż oszacowania błędu

$$|\int_a^b f\,dt - P_{[a,b]}f| \leq c_j \|f^{(j)}\|_{\infty,[a,b]}(b-a)^{j+1}$$

dla $f \in C^j([a,b])$ dla $j = 1, 2$. (Tu c_j stałe niezależne od f ani a, b.) Przypadek $j = 2$ jest trudny.

(c) Konstruujemy kwadraturę złożoną prostokątów dla całki $\int_c^d f(x)\,dx$:

$$P_n f := \sum_{k=1}^{N} P_{[x_{k-1},x_k]}f = h\sum_{k=1}^{N} f(x_k - h/2)$$

dla $h = (d-c)/N$ i $x_k = c + k*h$. Pokaż, że

$$e_N = |\int_c^d f\,dt - P_N f| \leq d_j h^j \|f^{(j)}\|_{\infty,[c,d]}$$

dla $j = 1, 2$. (Tu d_j stałe niezależne od f ani N czy h.)

(d) Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} e_N = 0$ dla f dowolnej ciągłej (pochodna może nie istnieć).

Wsk: Trzeci podpunkt wynika z drugiego.

Zadanie 15 Dla macierzy $A = [3, -1; -1, 3]$ zastosowano metodę potęgową (z normowaniem przez normę drugą tzn. $\|x_k\|_2 = 1$) z $x_0 = [1; 0]$. Czy otrzymany ciąg lub podciąg wektorów x_k zbiegnie? Jeśli tak to policz odpowiednią granicę. Czy istnieje granica $r_k = x_k^T A x_k/\|x_k\|_2^2$? (notacja octave'a - ; oddziela wiersze)

Zadanie 16 Dla macierzy $A = [10, -1; -1, 10]$ zastosowano odwrotną metodę potęgową z parametrem 8 (z normowaniem przez normę drugą tzn. $\|x_k\|_2 = 1$) z $x_0 = [1; 0]$. Czy otrzymany ciąg lub podciąg wektorów x_k zbiegnie? Jeśli tak to policz odpowiednią granicę. Czy istnieje granica $r_k = x_k^T A x_k/\|x_k\|_2^2$? (notacja octave'a - ; oddziela wiersze)