# Seria druga - LU, QR i LZNK

**Zadanie 1** (trudne) Udowodnij, że dla macierzy $A = (a_{kl})$ silnie diagonalnie dominującej wierszowo tzn.

$$|a_{kk}| > \sum_{k \neq l} |a_{kl}| \ \forall k$$

eliminacje Gaussa tzn rozkład LU można wykonać bez wyboru elementu głównego (czyli bez permutacji kolumn czy wierszy).

Uwaga: Nie jest to trudne ale na tyle mozolne że na kartkówce nie będzie - ale TRZEBA to wiedzieć więc zachęcam do przeliczenia.

**Zadanie 2** Niech

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 30 & 22 & 11 \\ 0 & 20 & 110 \end{pmatrix}$$

Znajdź metodą eliminacji Gaussa z wyborem elementu w kolumnie (częściowy wybór elementu głównego) macierze $L, U, P$ gdzie $L$ dolnotrójkątna z jedynkami na diagonali, $U$ górnotrójkątna, $P$ permutacji takie, że $PA = LU$.

**Zadanie 3** Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Znajdź metodą eliminacji Gaussa dla macierzy symetrucznej dodatnio określonej macierze rozkładu Choleskiego tzn. $L, D$ gdzie $L$ dolnotrójkątna z jedynkami na diagonali, $D$ diagonalna z dodatnimi elementami na diagonali, takie, że $A = LDL^T$. jak znając ten rozkład znaleźć czynnik rozkładu Choleskiego tzn. $\hat{L}$ macierz dolnotrójkątną taką, że $A = \hat{L}\hat{L}^T$?

**Zadanie 4** Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Znajdź metodą Choleskiego czynnik rozkładu Choleskiego tzn. $L$ macierz dolnotrójkątna z dodatnią przekątną taką, że $A = LL^T$. Czy istnieje rozkład Choleskiego macierzy

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}?$$

**Zadanie 5** Rozpatrzmy macierz kwadratową wymiaru $(m+2) \times (m+2)$ dla $m \geq 2$ zapisaną w formie blokowej $A = \begin{pmatrix} C & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$, gdzie $C$ dana nieosobliwa macierz $m \times m$, której czynniki rozkładu QR mamy dane (tzn znamy ortogonalną $Q$ i górnotrójkątną $R$ takie, że $C = QR$), $B$ macierz $m \times 2$ maksymalnego rzędu.

(a) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu równań liniowych $A\vec{x} = \vec{f}$ możliwie niskim kosztem przy założeniu, że $A$ nieosobliwa.

(b) Oszacuj ten koszt w terminach $C_1 m^p + O(m^{p-1})$ dla $p = 1, 2, 3, \ldots$ i $C_1$ stałej.

(c) Czy przy powyższych założeniach $A$ jest nieosobliwa? Jeśli nie to podaj możliwy do sprawdzenia możliwie tanio warunek na $C$ i $B$, aby $A$ była nieosobliwa.

**Zadanie 6** (Układ z macierzą trójdiagonalną cykliczną) Rozpatrzmy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ i $A$ macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko w rogach i na 3 głównych diagonalach tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ d_2 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa (rozkładu LU) bez wybory elementu głównego możliwie niskim koszcie względem $n$. Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej $C$ i $p$ naturalnego).

Wsk: Dla $d_1 = d_2 = 0$ algorytm jest znany powinien być na ćwiczeniach (eliminujemy tylko poddiagonale - $n-1$ kroków o stałym koszcie - otrzymujemy rozkład LU z $L, U$ 2-diagonalnymi) - zmodyfikuj ten algorytm dla macierzy cyklicznej.

**Zadanie 7** Dla macierzy $A$ wymiaru $10 \times 10$ z Zadania 6 dla $a_k = d_k = -b_k = -c_k = 1$ dla wszystkich odpowiednich $k$, oblicz indukowaną normę maksimum tzn. $\|A\|_\infty$ i wyznacz taki wektor $x$ różny od zera, że $\|x\|_\infty \|A\|_\infty = \|Ax\|_\infty$. Czy wektor $x$ jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do przemnożenia przez $-1$)?

**Zadanie 8** Dla danych $m$ różnych punktów $(x_k, y_k)$ określamy krzywą $y - a * x^4 - bx^2 - c = 0$ ($a, b, c$ parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^{m} |y_k - a * x_k^4 - bx_k^2 - c|^2 = \min_{\hat{a},\hat{b},\hat{c}} \sum_{k=1}^{m} |y_k - \hat{a} * x_k^4 - \hat{b} * x_k^2 - \hat{c}|^2$$

Sformułuj zadanie znalezienia parametrów takiej krzywej jako liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) dla danych $m$ punktów. Określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to zadania miało jednoznaczne rozwiązanie dla $m \geq 0$. Wyznacz koszt rozwiązania tego LZNK zadania przy pomocy algorytmu Householdera względem $m$ tzn jako $C_H m^p + O(m^{p-1})$ dla $C_H$ stałej dodatniej i $p$ wykładnika naturalnego.

**Zadanie 9** Niech $A$ macierz $n + 1 \times n$ kolumnami regularna trójdiagonalna tzn. wszystkie elementy takie, że $|i - j| > 1$ są równe zero. Jak rozwiązać LZNK z taką macierzą kosztem rzędu $C_1 n + C_2$ dla $C_1, C_2$ stałych dodatnich z użyciem rozkładu QR uzyskanym z wykorzystaniem macierzy Householdera.

**Zadanie 10** (trudne) Rozpatrzmy macierz $A$ wymiaru $(n+1) \times n$ taką że jeśli zapisując blokowo mamy:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \vec{b}_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

dla $A_1$ macierzy $n \times (n-1)$ i wektora $\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ z $b_2$ różnym od zera i $\vec{b}_1$ wektorem wymiaru $n$. Znamy macierze: górnotrójkątną max rzędu $R$ wymiaru $n \times (n-1)$ i $Q_1$ ortogonalną wymiaru $n \times n$ że

$$A_1 = Q_1 R.$$

oraz potrafimy policzyć iloczyn $Q_1 x$ lub $Q_1^T x$ kosztem liniowym tzn. $Cn$ dla pewnej stałej $C$. Czy macierz $A$ jest kolumnami regularna? A jeśli tak to jak możliwie tanio znaleźć rozkład $QR$ macierzy $A$ z $Q$ ortogonalną i $R$ górnotrójkątną? Podaj koszt jako funkcję postaci $C_2 n^p + O(n^{p-1})$ dla najniższego możliwego $p$ naturalnego i jakiejś stałej $C_2$. Można rozważyć dwa przypadki - pierwszy kiedy explicite wyliczamy $Q$ a drugi gdy otrzymujemy $Q$ jako iloczyn odpowiednio dobranych macierzy ortogonalnych.

**Zadanie 11** (trudne) Dla danego $\epsilon > 0$ niech

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 & 0 \\ 1 & \epsilon & 1 \\ 0 & 1 & \epsilon \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{cond}_2(A_\epsilon) = \infty.$$

Wsk: Dla $A = A^T$ $\|A\|_2 = \rho(A)$ promień spektralny (max z modułu z wartości własnych) - zauważmy że $A = \epsilon I + A_0$ dla

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

więc $\lambda(A_\epsilon) = \epsilon + \lambda(A_0)$ dla $\lambda(C)$ zbiór wartości własnych macierzy $C$.

**Zadanie 12** (nie będzie na 1 kartkówce w listopadzie) Rozpatrzmy rodzinę LZNK z macierzą $A_\alpha$ i wektorem $f$ takich, że:

$$H_2 * H_1 * A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

gdzie $H_k$ jest macierzą Householdera z odpowiednim wektorem Householdera $w_k$: $w_1 = (1,1,1,1)^T$ i $w_2 = (0,-2,0,0)^T$.

(a) Określ dla jakich wartości $\alpha$ to LZNK ma jednoznaczne rozwiązanie.

(b) Policz pierwsze kolumny macierzy $A_\alpha$ dla $\alpha$ równego 8 i $-\sqrt{7}/23$.

(c) Dla jakiego $\alpha$ błąd rozwiązania LZNK $\|A_\alpha x_\alpha^* - f\|_2$ jest najmniejszy? Tu $x_\alpha^*$ to rozwiązania LZNK z $A_\alpha$ i $f$.