Zadania z fl i norm

Oznaczenie : aew oznacza $a * 10^w$ dla a liczby rzeczywistej z zakresu $[0, 10]$ postaci $d.dddd$ gdzie d to cyfra $0, \ldots, 9$, a w wykładnik czyli liczba całkowita, np $1.234567e5$ oznacza 123456.7 a $0.1234e-3$ oznacza 0.0001234.

Zadania czy podpunkty oznaczone jako **trudne/bardzo trudne** nie będą na kartkówce. Część z nich jest trudna pozornie z braku narzędzi które pojawią się na wykładzie później, albo jest tylko dość mozolna obliczeniowo.

Zadanie 1 Chcemy obliczyć funkcję $f(x) = \exp(10^7 x)$ w arytmetyce pojedynczej precyzji (nie przejmując się zakresem tzn. niedomiarem/nadmiarem). Policz (przybliżony i względny) współczynnik uwarunkowania zadania dla $x \in [-10, 10]$ i określ czy obliczanie w tej arytmetyce fl wartości f dla $x = -6$ jest dobrze uwarunkowane ze względu na błąd względny?

Zadanie 2 Chcemy w fl obliczyć $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + 7}$. Rozpatrzmy dwa algorytmy: w pierwszym liczymy:

$f := \sqrt{4x^2 + 7}; f := 2x - f;$

a w drugim:

$f := \sqrt{4x^2 + 7}; f := -7.0/(2x + f);$

Który z nich należy zastosować do obliczenia w arytmetyce fl pojedynczej precyzji $f(10^7)$? (Podać krótkie uzasadnienie - 1-2 zdania - nie trzeba formalnie dowodzić oszacowań)

Zadanie 3 Chcemy obliczyć $(x + 2)^3 - 8$ dla $x > 0$. Zaproponuj algorytm o małym błędzie względnym obliczania tej funkcji dla $x > 0$. (uzasadnij)

WSK: Można pokazać numeryczną poprawność + dobre uwarunkowanie - co gwarantuje mały błąd względny (wykład) ale tu daje się to pokazać wprost dla odpowiedniego algorytmu.

Zadanie 4 Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania: iloczynu skalarnego dwóch wektorów $x, y \in \mathbb{R}^M$ tzn. $x^T y = \sum_{k=1}^{M} x(k)y(k)$ jest numerycznie poprawny tzn. obliczamy

```
s=x(1)*y(1);
for  k=2:M,
  s=s+x(k)*y(k);
endfor
```

Zadanie 5 Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania iloczynu macierz kwadratowej $A \in \mathbb{R}^{M,M}$ i wektora $x, \in \mathbb{R}^M$ tzn. $y = Ax$: jest numerycznie poprawny:

```
for  j=1:M,
 y(j)=0;
 for k=1:M,
   y(j)=y(j)+A(j,k)*x(k);
 endfor
endfor
```

Wskazówka: $y(j)$ jest iloczynem skalarnym $j-$tego wiersza A z x.

Zadanie 6 (trudne) Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania: cosinusa kąta dwóch wektorów $x, y \in \mathbb{R}^M$ tzn. $\cos(x,y) = \frac{x^T y}{\sqrt{x^T x}\sqrt{y^T y}}$ jest numerycznie poprawny:

(a) $a = \sqrt{\sum_{k=1}^M x_k^2}$, $b = \sqrt{\sum_{k=1}^M y_k^2}$

(b) $c = \sum_{k=1}^M x_k y_k$

(c) $w = c/(a * b)$

Zadanie 7 Dla $C = 10^{30}$ znajdź takie $\alpha > 0$, że dla normy postaci $\|x\| = |x_1| + \alpha|x_2|$ w $\mathbb{R}^2$ zachodziło

$$\max_{x\neq 1} \frac{\|x\|_1}{\|x\|} = C \qquad \min_{x\neq 1} \frac{\|x\|_1}{\|x\|} = 1$$

tzn. by optymalne stałe równoważności były równe C i jeden odpowiednio.

Zadanie 8 Znajdź możliwe duże $c > 0$ i możliwie małe $C > 0$, że dla normy wektorowej w $\mathbb{R}^k$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^k j^{-1}|x_j|^2}$ zachodzi

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k \qquad c\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|_2.$$

Stałe c, C nazywamy stałymi równoważności między normą drugą a normą $\|\cdot\|$.

Zadanie 9 Dla wektora rzeczywistego $x = (x_i)_{i=1}^m$ definiujemy $|x| = (|x_i|)_{i=1}^m$. Dla norm p-tych zachodzi zawsze $\|x\|_p = \||x|\|_p$. Czy istnieje norma $\|\cdot\|$ w $\mathbb{R}^2$ dla której istnieje wektor x taki, że $\|x\| \neq \||x|\|$? Uzasadnij (w przypadku na tak podaj definicję normy).

Zadanie 10 Dla macierzy rzeczywistej $A = (a_{ij})_{i,j}$ $n \times n$ zdefiniujmy $|A| = (|a_{ij}|)_{ij}$.

(a) Czy dla normy Frobeniusa, maksimum i pierwszej zachodzi równość norm A i $|A|$? Wsk: Istnieją proste wzory na te normy zależne od współczynników macierzy.

(b) Pokaż np wprost z definicji normy indukowanej, że

$$\|A\|_2 \leq \||A|\|_2.$$

(c) (trudne) Podaj kontrprzykład, że odwrotna nierówność nie zawsze zachodzi. Wsk: Można skonstruować kontrprzykład $A = A^T$ 2×2 korzystając ze wzoru: $\|A\|_2 = \rho(A)$ - dla $A = A^T$. Tu $\rho(A)$ moduł największej co do modułu wartości własnej A.

Zadanie 11 Pokaż że jeśli dla wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$ (x ma niezerowe składowe tzn. $x_k \neq 0$) zachodzi $\frac{|x_k - y_k|}{|x_k|} \leq \epsilon$

$$\frac{|x_k - y_k|}{|x_k|} \leq \epsilon \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

to

$$\frac{\|x_k - y_k\|_p}{\|x_k\|_p} \leq \epsilon \qquad p = 1, 2, \infty \tag{2.2}$$

Zadanie 12 Czy stwierdzenie odwrotne do poprzedniego zadania jest prawdziwe np. dla $p = \infty$ czy z tego że zachodzi (2.2) zachodzi (2.1)? Jeśli nie zachodzi proszę podać kontrprzykład np. dla $n = 2$.

Rozwiązania zadań powinny być uzasadnione. Można powoływać się na wyniki z wykładu czy z ćwiczeń o ile zostały na tych ćwiczeniach udowodnione i wtedy jeśli to wyniki z ćwiczeń to należy je precyzyjnie sformułować.