Seria czwarta - aproksymacja, kwadratury, metody iteracyjne, metoda potęgowa

Zadanie 1 Rozpatrzmy $g(x) = \sin(x)$ i zadania znalezienia wielomianów najlepszej aproksymacji dla g: $w_1 \in V_1 = P_n$ i $w_2 \in V_2 = P_{n-1}$ dla $n > 0$ w normie:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos(x))|f(x)|^2 \, dx}.$$

(a) Znajdź w_1, w_2 dla $n = 1$.

(b) Dla jakich $n > 0$ prawdą jest, że $w_1 = w_2$? Uzasadnij odpowiedź.

WSK: to norma typu L^2 więc generowana przez iloczyn skalarny a podprzestrzenie są przestrzeniami wielomianów. Każda metod opisana na końcu zadziała ale żeby sobie uprościć rachunki można zauważyć, że w iloczynie skalarnym generującym tę normę $(u, v) = 0$ o ile $u * v$ jest funkcją nieparzystą np. $(\sin(x)x^k)$ lub (x^k, x^j) dla k parzystego a j nieparzystego.

Zadanie 2 (a) Pokaż, że element najlepszej aproksymacji jednostajnej, czyli w normie $\|\cdot\|_\infty$, w P_n na $[a, b]$ dla dowolnej funkcji ciągłej f interpoluje tę funkcję w $n + 1$ punktach na $[a, b]$.

(b) Czy prawdą jest, że dla danej funkcji f ciągłej na $[a, b]$ zawsze istnieje ciąg węzłów $\{x_k^n\}_{k=0}^n \subset [a, b]$ taki, że ciąg wielomianów stopni nie większych od n: $L_n f$ interpolujących tę funkcję w tych węzłach (tzn. $L_n f(x_k^n) = f(x_k^n)$) zbiega jednostajnie do tej funkcji? Uzasadnij odpowiedź.

WSK: Użyj twierdzenia o alternansie.

Zadanie 3 Dla zbioru $K = \{-1, 0, 1\}$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty,K} = \max_{x\in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = x^2 - 1.876 * x + \sqrt{17}$.

WSK: Ile punktowy jest alternans dla wielomianu liniowego a ile punktów jest w zbiorze K?

Zadanie 4 Dla zbioru $K = [-1, 1]$ znajdź liniowy wielomian najlepszej aproksymacji w normie $\|f\|_{\infty,K} = \max_{x\in K} |f(x)|$ dla funkcji $f(x) = x^2 - 1.876 * x + \sqrt{17}$. Pokaż że alternans w tym przypadku zawiera końce odcinka.

WSK: Funkcja $f - p$ jest ściśle wypukła dla dowolnego wielomianu liniowego p. Ile punktowy jest alternans dla wielomianu liniowego? Ile ekstremów WEWNĄTRZ odcinka może mieć funkcja $f - p$ dla p wielomianu liniowego?

Zadanie 5 Pokaż że dla dodatniej wagi parzystej ω (tzn. $\omega(-x) = \omega(x)$) wielomian ortogonalny stopnia parzystego w iloczynie skalarnym typu $L^2_\omega(-a, a)$: $(f, g)_{L^2_\omega(-a,a)} := \int_{-a}^{a} \omega f g \, dx$ jest funkcją parzystą.

Zadanie 6 Wiedząc, że dla danej dodatniej wagi ω zachodzi:

$$\int_{-1}^{3} x^k \omega \, dx = \begin{cases} 0 & k \text{ nieparzyste} \\ \frac{1}{k+1} & w.p.p. \end{cases} \qquad k = 0, \ldots, 8$$

- znajdź pierwsze cztery wielomiany ortogonalne T_k $k = 1, 2, 3, 4$ w iloczynie skalarnym $(f, g) := \int_{-1}^{3} \omega f g \, dx$.

- znajdź kwadraturę Gaussa obliczania $\int_{-1}^{3} f\omega\, dx$ rzędu cztery.

WSK: W pierwszym podpunkcie można skorzystać z ortogonalizacji Gramma-Schmidta lub reguły trócztonowej - por. notatki z wykładu. W drugim podpunkcie należy skorzystać z pierwszego.

Zadanie 7 Znajdź kwadraturę maksymalnego rzędu opartą o dwa węzły w tym jeden równy zero dla obliczania $\int_{-1}^{3} f\, dx$ tzn $Qf = Af(0) + Bf(\theta)$ dla $\theta \in [-1, 3]$.

Zadanie 8 (o ile nie było na ćwiczeniach) Rozpatrzmy kwadraturę $P_{[a,b]}f = (b-a)*f((a+b)/2)$ dla $\int_a^b f\, dt$.

(a) Znajdź jej rząd.

(b) Pokaż oszacowania błędu

$$|\int_a^b f\, dt - P_{[a,b]}f| \leq c_j \|f^{(j)}\|_{\infty,[a,b]}(b-a)^{j+1}$$

dla $f \in C^j([a, b])$ dla $j = 1, 2$. (Tu c_j stałe niezależne od f ani a, b.) Przypadek $j = 2$ jest trudny.

(c) Konstruujemy kwadraturę złożoną prostokątów dla całki $\int_c^d f(x)\, dx$:

$$P_n f := \sum_{k=1}^{N} P_{[x_{k-1},x_k]}f = h \sum_{k=1}^{N} f(x_k - h/2)$$

dla $h = (d - c)/N$ i $x_k = c + k * h$. Pokaż, że

$$e_N = |\int_c^d f\, dt - P_N f| \leq d_j h^j \|f^{(j)}\|_{\infty,[c,d]}$$

dla $j = 1, 2$. (Tu d_j stałe niezależne od f ani N czy h.)

(d) Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} e_N = 0$ dla f dowolnej ciągłej (pochodna może nie istnieć).

Wsk: Trzeci podpunkt wynika z drugiego.

Zadanie 9 Dla macierzy $A = [3, -1; -1, 3]$ zastosowano metodę potęgową (z normowaniem przez normę drugą tzn. $\|x_k\|_2 = 1$) z $x_0 = [1; 0]$. Czy otrzymany ciąg lub podciąg wektorów x_k zbiegnie? Jeśli tak to policz odpowiednią granicę. Czy istnieje granica $r_k = x_k^T A x_k / \|x_k\|_2^2$? (notacja octave'a - ; oddziela wiersze)

Zadanie 10 Dla macierzy $A = [10, -1; -1, 10]$ zastosowano odwrotną metodę potęgową z parametrem 8 (z normowaniem przez normę drugą tzn. $\|x_k\|_2 = 1$) z $x_0 = [1; 0]$. Czy otrzymany ciąg lub podciąg wektorów x_k zbiegnie? Jeśli tak to policz odpowiednią granicę. Czy istnieje granica $r_k = x_k^T A x_k / \|x_k\|_2^2$? (notacja octave'a - ; oddziela wiersze)

Zadanie 11 Czy istnieje wartość parametru τ dla którego metoda Richardsona będzie zbieżna (dla dowolnego x_0) dla układu równań z macierzą:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Zadanie 12 Dla jakich wartości parametru s nastepująca metoda iteracyjna będzie zbieżna:

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{k} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

dla g_1, g_2 ustalonych wartości.

Zadanie 13 Rozpatrzmy macierz symetryczną $A \in \mathbb{R}^{100,100}$ o wartościach własnych $\{1, \dots, 100\}$ z odpowiednimi wektorami własnymi q_k, tj. $Aq_k = k * q_k$. Chcemy znaleźć rozwiązanie układu równań $Ax^* = b$. Znamy x_0 takie, że $x_0 - x^* = \sum_{k=1}^{15} a_k q_k$ dla a_k współczynników. Określ czy metoda Richardsona będzie zbieżna dla nastepująch wartości parametru τ:

- $\tau = 0.01$
- $\tau = 1$
- $\tau = 0.1$.

W przypadku zbieżności oszacuj błąd $\frac{\|x^* - x_2\|_2}{\|x^* - x_0\|_2}$ dla x_k k tej iteracji metody.

Zadanie 14 Niech $A = (a_{kl})_{k,l=1}^{n}$ macierz symetryczna i nieosobliwa o wartościach własnych należących do przedziału $[-1, 2]$. Do rozwiązania układu równań liniowych $Bx^* = b$ z macierzą $B = I + A * A$ zastosowano metodę iteracyjną Richardsona z parametrem $\tau = 1/8$ Określ czy metoda zbiegnie do x^*i w przypadku zbieżności oszacuj odpowiedni błąd:

$$\frac{\|x^* - x_9^{Rich}\|_B}{\|x^* - x_0^{Rich}\|_B},$$

gdzie x_9^{Rich} dziewiąta iteracja Richardsona

Zadanie 15 Dla A nieosobliwej takiej, że dla ustalonej liczby b macierz $A - b * I$ jest nieosobliwa i spełnia $A - b * I = QZ$ dla Q ortogonalnej, Z nieosobliwej definiujemy macierz

$$C := ZQ + b * I$$

Czy C jest podobna do macierzy A? Tzn czy istnieje taka macierz nieosobliwa W, że $WCW^{-1} = A$? Czy znając Z, Q, b możemy macierz W wyznaczyć?

Zadanie 16 Dla $A = [-7, 1; -1, -7]$ zastosowano następujący algorytm: $Z_0 = I$ i dla $k = 0, 1, \dots$ znajdź Z_{k+1} ortogonalną i R_k górnotrójkątną takie, że $Z_{k+1}R_{k+1} = AZ_k$.

- Policz wartości i wektory własne A.
- Pokaż że ciąg pierwszych/drugich kolumn macierzy Z_k mają podciągi zbieżne do wektorów własnych macierzy A.
- Pokaż że macierze R_k zbiegną do macierzy diagonalnej - wyznacz jej wartości na diagonali.
- przyjmując $Q_{k+1} := Z_k^T Z_{k+1}$ pokaż, że $Q_{k+1}R_{k+1} = Z_k^T A Z_k := A_k$ oraz $R_{k+1}Q_{k+1} = Z_{k+1}^T A Z_{k+1} = A_{k+1}$.
- Pokaż, że algorytm : $A_0 = A$ dla $k \geq 0$ policz rozkład QR macierzy $A_k = Q_{k+1}R_{k+1}$ nastepnie policz $A_{k+1} = R_{k+1}Q_{k+1}$ jest równoważny wyjściowemu (przyjmując definicje Z_k, Q_k, A_k z punktów powyżej).

Aproksymacja w przestrzeni z iloczynem skalarnym

Dla danej normy znaleźć element najlepszej aproksymacji w podprzestrzeni V_k skończenie wymiarowej przestrzeni V dla wektora g. Jeśli norma generowana przez iloczyn skalarny np. $(u,v) := \int_a^b \omega v(x)u(x)\,dx$ dla V_k podprzestrzeni wielomianów stopnia $\leq k$ wtedy są 2 metody albo policzyć macierz Gramma w jakiejkolwiek bazie V_k oznaczonej jako $(\phi_k)_{k=1}^{dim(V_k)}$ tzn macierz $G = ((\phi_k,\phi_j))_{k,j=1}^{dim(V_k)}$ (tu (u,v) iloczy skalarny generujący normę $\|u\| = (u,u)^{1/2}$) oraz wektor prawej strony $\vec{b} = ((g,\phi_k))_{k=1}^{dim(V_k)}$ i rozwiązać układ $G\vec{\alpha} = \vec{b}$ wtedy $\sum_j \alpha_j\phi_j$ jest rzutem ortogonalnym g na V_k w tej normie czyli elementem najlepszej aproksymacji w V_k dla g. Druga metoda znaleźć bazę ortogonalną np. zoortogonalizować jakkąkolwiek bazę procesem ortognalizacji Gramma-Schmidta czy użyc reguły trójczłonowej (użycie reguły trójczłonowej możliwe o ile to podprzestrzeń wielomianów i iloczyn skalarny typu L^2) i dalej zrobić to samo - wtedy macierz Gramma jest diagonalna.

Aproksymacja w przestrzeni z normą supremum

Jeśli norma jest normą supremum na K zbiorze zwartym (w praktyce albo adcinek $[a,b]$ albo zbiór punktów) i V_p to znów przestrzeń wielomianów stopnie nie większego od p to trzeba znaleźć alternans i wielomian p tzn taki zbiór $p+2$ elementowy $x_0 < x_1 < \ldots < x_{p+1}$ w K aby $f(x_k) - p(x_k) = \epsilon(-1)^k\|f-p\|_\infty$ dla $\epsilon \in \{-1,1\}$.

Czasami można skorzystać z tego że potrafimy znaleźć wielomian postaci $x^{p+1} + ...$ o minimalnej normie supremum na $[a,b]$ - jako odpowiednio przeskalowany wielomian Czebyszewa. Zastosowanie - gdy np g wielomian stopnia $p+1$ a V_k wielomiany stopnia nie większego od p.

Appendix

Wiadomości z tego dodatku są również w skrypcie P.K. ale są to informacje niezbędne do rozwiązania niektórych zadań.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności metody $x_k = Bx_{k-1} + g$ dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^N$ do punktu stałego: $x^* = Bx^* + g$, (B macierz iteracji taka, że $(I-B)$ nieosobliwa) jest to aby

$$\rho(B) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda_k| < 1$$

Tu $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : det(A-\lambda I) = 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x \in \mathbb{C}^N, x \neq 0\ i\ Ax = \lambda x\}$ to spektrum (widmo) macierzy A czyli zbiór wartości własnych $A\cdot$ Wektor $x \neq 0$ taki, że $Ax = \lambda x$ nazywamy wektorem własnym dla λ wartości własnej i (λ, x) nazywamy parą własną. Proszę zauważyć, że $p(x) = det(A - x * I)$ jest wielomianem stopnia N, tak więc zawsze istnieje N wartości własnych (wliczając krotności). W przypadku wartości własnych nierzeczywistych są to zawsze pary sprzężone (o ile $A \in \mathbb{R}^N$) tzn. jeśli (λ, x) para własna to $(\overline{\lambda}, \overline{x})$ też para własna (zadanie), kreska oznacza sprzężenie zespolone.

Dla $A = A^T$ wartości własne są rzeczywiste, co więcej istnieje macierz ortogonalna Q (tzn. $Q^TQ = Q^TQ = I$) taka, że $A = Q\Lambda Q^T$ dla $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$ macierzy diagonalnej z wartościami własnymi na diagonali. Proste zadanie to pokazanie, że wtedy $\rho(A) = \|A\|_2$, stąd też nazwa 2 normy macierzy jako normy spektralnej macierzy.